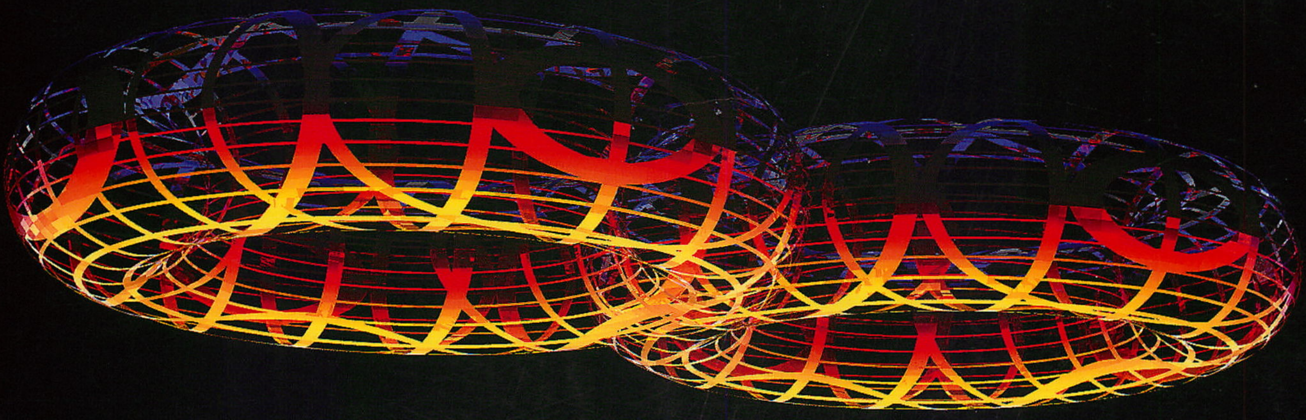
理論物理学のための
幾何学とトポロジーⅡ



中原　幹夫：著

中原　幹夫／佐久間一浩：訳

Pearson Education Japan

ピアソン・エデュケーション

理論物理学のための
幾何学とトポロジーII

中原　幹夫：著
中原　幹夫／佐久間一浩：訳

Pearson Education Japan
ピアソン・エデュケーション

Geometry, Topology and Physics
by
Mikio Nakahara

Originally published in English by IOP Publishing Ltd, Techno House, Redcliffe Way,
Bristol BS1 6NX, England
First published 1990
Japanese translation rights arranged with IOP Publishing Ltd, Bristol, England
through Tuttle-Mori Agency, Inc., Tokyo.

序　文

本書は 1986 年冬期に Sussex 大学数理物理科学教室で行った講義をもとに，その内容を大幅に進展させたものである．その際の聴衆は大学院生及び素粒子論，物性物理学あるいは一般相対論を専門とする当教室のメンバーであった．講義はインフォーマルな雰囲気の中で行われたが，本書においても出来うる限りこの点を守るように心がけた．定理の証明はそれが教育的であるものに限って与え，極端にテクニカルなものは省略した；省略した場合は定理の内容が確証できるようにいくつかの例を与えることにした．また，図を出来るだけ多く挿入することで，内容に関する具体的なイメージが把握できるように読者の便宜をはかった．

理論物理学における最近の研究発展では頻繁にトポロジー，微分幾何や現在も発展している数学の最先端の分野の諸概念が広く用いられるにもかかわらず，物理の大学院生が手軽に読める完結した教科書を見つけるのはむしろ難しいのが現状である．そこで本書は高度な専門書や研究論文と，多くの優れた解説書の間の橋渡し役をすることを意図して書かれた．したがって読者としては場の理論と相対論には多少慣れている理論物理学の大学院初年級の学生を想定している．本書の随所において，物理学で位相的かつ幾何学的概念が大変重要な役割を果たしている用例を与えた．これらの用例は主に素粒子論，相対論，物性物理学から取捨選択されたものである．直接の興味から外れている例に関しては，必要がなければ自由に飛ばしても構わない．しかしながら私はこれらの用例はどれも理論物理学の学生にとっては「理論上必要最小限度事項」であると確信している．また，これらの分野の理論物理学への応用に関心のある数学者にとっても本書は興味深いものとなるだろう．

本書は大きく 4 つの部分に分けられる．第 1 章と第 2 章では物理学と数学の基礎概念を準備する．特に第 1 章では本書で主に扱う物理学の簡単な概説が与えられる．題材としては，経路積分，ゲージ理論（モノポールとインスタントンを含む），物性物理学における欠陥，一般相対論，量子力学における Berry 位相そして弦理論である．これらの殆どは，位相的あるいは幾何学的立場から後の章でより詳しく説明される．第 2 章では大抵の物理学者が学んだことのある学部レベルの数学をまとめる．集合，写像，位相空間論に馴染みのある読者は本章を飛ばして先に進んでも構わない．

第 3 章から第 8 章までは代数的トポロジーと微分幾何学の基礎となる部分である．第 3 章と第 4 章でホモロジー群やホモトピー群による空間の分類の概念が紹介される．第 5 章では多様体を定義するが，多様体は現代の理論物理学における中心概念の 1 つでもある．そこで定義される微分形式は本書の随所で重要な役割を果たすものである．微分形式が de Rham コホモロジー群とよばれる，いわばホモロジー群の双対にあたるものを定義可能にすることを第 6 章で考察する．第 7 章では計量を与えた多様体を扱う．計量を与えると幾何学的概念である接続，共変微分，曲率，捩率などが定義できるようになる．第 8 章では

複素多様体を，自然な複素構造をもつ特別な多様体のクラスとして定義する．

第 9 章から第 12 章ではトポロジーと幾何学を統一的に扱う．特に第 9 章でファイバー束を定義しこれが多くの物理的概念に関して自然な設定であることを示す．第 7 章で定義された接続が第 10 章で自然にファイバー束上に一般化される．第 11 章で定義される特性類の理論はコホモロジー類を用いてファイバー束を分類することを可能にする．特性類は第 12 章で述べられる Atiyah-Singer 指数定理において特に重要なものである．これは現代数学の最も重要な定理の 1 つであるがその証明は与えずに，物理学で実際に応用される指数定理の特別な形を書き下すにとどめる．

第 13 章と第 14 章は現在盛んに研究されている物理学の分野におけるトポロジーと幾何学の最も魅力ある応用である．第 13 章でファイバー束の理論，特性類，指数定理をゲージ理論における量子異常の研究に応用する．第 14 章では Polyakov のボース的弦理論が幾何学的立場から解析され，1 ループ振幅の具体的計算を与える．

最後に私の師，友人そして学生に心からの謝辞を述べたい．特に，浅井哲也，David Bailin，河野浩，David Lancaster，松谷茂樹，長島弘幸，David Pattarini，Felix E. A. Pirani，玉野研一，David Waxman，David Wong の諸氏に感謝したい．第 5 章における基礎概念は London 大学キングスカレッジでの F. E. A. Pirani 氏による講義に負うところが大きい．第 14 章で扱った Eisenstein 級数と Kronecker の極限公式を使った弦ラプラシアンの評価は浅井哲也氏から示唆していただいた．Euan Squires，David Bailin，河野浩の諸氏には有益なコメントと提言をいただいたことに感謝したい．特に David Bailin 氏は私に本書の執筆を薦めてくださった．また彼は Douglas F. Brewer 教授に，教授の編纂するシリーズに本書を加えることを進言してくれた．美しい原稿に仕上げてくれたことに謝辞を述べる秘書が私にはいなかったことは残念である．ワープロ原稿作成は私自身の手で 2 台の NEC PC-9801 機で行われた．またアダムヒルガー社 (現 IOP Publishing) の Jim A. Revill 氏は原稿準備中に様々な形で私を助けてくださり，また原稿締切の遅れにも寛大であったことに謝意を呈する．原稿準備中多くの音楽家の美しい音楽が私の研究室を満たしてくれた: 特に J. S. Bach，坂本龍一，Ravi Shankar そして Erick Satie に感謝したい．

1989 年 2 月　静岡にて
中原　幹夫

目 次

第 I 巻の目次

第9章　ファイバー束

多様体は，局所的には $\mathbb{R}^m$ のような位相空間であるが，大域的には必ずしもそうとはかぎらない．チャートを導入することにより，多様体に局所ユークリッド構造を与えて，そこで多変数の微積分が可能になった．ファイバー束はいわば 2 つの位相空間の直積に似た位相空間である．物理学における多くの理論，例えば一般相対論やゲージ理論などは，ファイバー束の理論により自然に記述される．

関連する参考文献は，Choquet-Bruhat & De Witt-Morette (1982), Eguchi 他 (1980), Nash & Sen (1983) がある．完全な記述は，Kobayashi & Nomizu (1963, 1969) にある．

9.1　接ベクトル束

分かりやすいように，動機付けとなる例の解説から始める．m 次元多様体 M 上の**接ベクトル束** TM とは M のすべての接空間の集まりである：

$$TM \equiv \bigcup_{p\in M} T_pM \tag{9.1}$$

TM がその上に定義されている多様体 M を**底空間**という．$\{U_i\}$ を M の開被覆とする．$x^\mu = \varphi_i(p)$ が U_i 上の座標であるとき，

$$TU_i \equiv \bigcup_{p\in U_i} T_pM$$

の元は点 $p \in M$ とベクトル $V = V^\mu(p)\partial/\partial x^\mu \big|_p \in T_pM$ によって決まる．U_i が $\mathbb{R}^m$ の開集合 $\varphi_i(U_i)$ に同相で，各 T_pM が $\mathbb{R}^m$ に同相であることに注意すると，TU_i が直積 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ と同一視されることがわかる (図 9.1)．もし $(p, V) \in TU_i$ ならば，この同一視は $(p, V) \mapsto (x^\mu(p), V^\mu(p))$ で与えられる．したがって，TU_i は $2m$ 次元微分可能多様体である．さらに，TU_i は直積 $U_i \times \mathbb{R}^m$ に分解される．もし TU_i の点 u を選ぶと u がもつ情報を点 $p \in M$ とベクトル $V \in T_pM$ に体系的に分解できる．こうして，自然に**射影** $\pi : TU_i \to U_i$ の概念に導かれる (図 9.1)．任意の点 $u \in TU_i$ に対して，$\pi(u)$ はベクトルが定義されている点 $p \in U_i$ である．そのベクトルに関する情報は射影により完全に失われる．$\pi^{-1}(p) = T_pM$ であることを検証せよ．ファイバー束の理論では，T_pM は p における**ファイバー**とよばれる．

構成から明らかなのは，$M = \mathbb{R}^m$ のときはそれ自身の接ベクトル束は直積 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ として表される．しかしこれはいつでもそうとは限らず，接ベクトル束の非自明な構造は M の位相的な非自明さを測るものである．これを確かめるためには一つのチャート U_i 上でだけでなく，他のチャートも見る必要がある．U_j を $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ であるようなチャートとし，

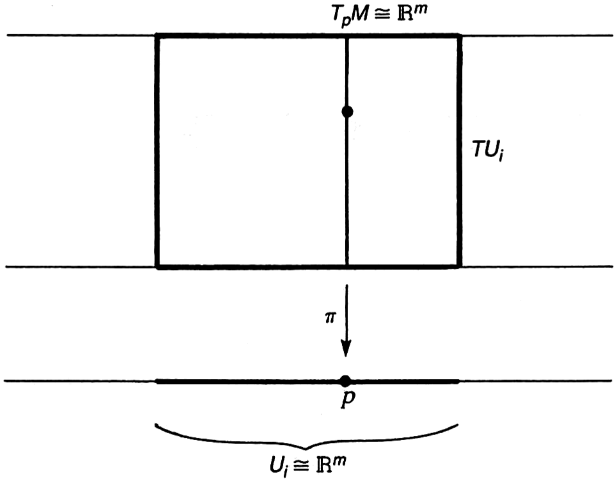


図 9.1. 接ベクトル束 TM の局所的な一部分 $TU_i \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. π はベクトル $V \in T_pM$ を p に射影する.

$y^\mu = \psi(p)$ を U_j 上の座標とする．そこで $p \in U_i \cap U_j$ に対して，ベクトル $V \in T_pM$ を選ぶ．V には 2 つの表示の仕方

$$V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big|_p = \tilde{V}^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}\Big|_p \tag{9.2}$$

がある．容易に

$$\tilde{V}^\nu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}(p) V^\mu \tag{9.3}$$

がわかる．$\{x^\mu\}$ と $\{y^\nu\}$ がよい座標系であるためには，行列 $(G^\nu{}_\mu) \equiv (\partial y^\nu/\partial x^\mu)$ は非特異でなければならない：$(G^\nu{}_\mu) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$．したがって，ファイバー方向の座標は，座標変換するときはいつでも $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ の元により変換される．群 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ は TM の**構造群**とよばれる．このようにして，ファイバーを織り込んで接束が構成されるが，このことが結果的に接束に複雑な位相構造を与えるのである．

射影 π は M 上で大域的に定義されることに注意する．$\pi(u) = p$ が特別な座標の選び方によらないことは明らかである．こうして，$\pi : TM \to M$ は局所座標の表示によらず大域的に定義されている．

X を M 上のベクトル場とする．X は各点 $p \in M$ でベクトル $X|_p \in T_pM$ を定める．我々の観点から，X は滑らかな写像 $M \to TM$ と見なされる．この写像は，点 p が $\pi(u) = p$ を満たすように点 $u \in TM$ に移されなければならないので，全く任意というわけではない．そこで TM の**切断** (あるいは**断面**) を $\pi s = \mathrm{id}_M$ を満たす滑らかな写像 $s : M \to TM$ として定義する．もし切断 $s_i : U_i \to TU_i$ がチャート U_i 上のみで定義されているときは，**局所切断**とよばれる．

9.2 ファイバー束

前節の接束はファイバー束とよばれるもっと一般的な枠組みの 1 つの例に過ぎない．定義を順に述べよう．

9.2.1 諸定義

定義 9.1 (微分可能) ファイバー束 (E,π,M,F,G) とは次のものからなる：

(i) **全空間**とよばれる微分可能多様体 E.

(ii) **底空間**とよばれる微分可能多様体 M.

(iii) **ファイバー** (あるいは**典型ファイバー**) とよばれる微分可能多様体 F.

(iv) **射影**とよばれる全射 $\pi:E\to M$．逆像 $\pi^{-1}(p)\equiv F_p\cong F$ は点 p におけるファイバーとよばれる．

(v) **構造群**とよばれる Lie 群 G．G は左から F に作用する．

(vi) M の開被覆 $\{U_i\}$，および $\pi\phi_i(p,f)=p$ を満たす微分同相写像 $\phi_i:U_i\times F\to\pi^{-1}(U_i)$．写像 ϕ_i は，ϕ_i^{-1} が $\pi^{-1}(U_i)$ を直積 $U_i\times F$ の上に移すので，**局所自明化**とよばれる．

(vii) $\phi_i(p,f)=\phi_{i,p}(f)$ とかくとき，写像 $\phi_{i,p}:F\to F_p$ は微分同相写像である．$U_i\cap U_j\neq\emptyset$ 上では，$t_{ij}(p)\equiv\phi_{i,p}^{-1}\circ\phi_{j,p}:F\to F$ が G の元であることを要請する．このとき，ϕ_i と ϕ_j は滑らかな写像 $t_{ij}:U_i\cap U_j\to G$ によって

$$\phi_j(p,f)=\phi_i(p,t_{ij}(p)f) \tag{9.4}$$

で関係づけられる (図 9.2)．$\{t_{ij}\}$ は**変換関数**とよばれる．

[注：しばしば，ファイバー束 (E,π,M,F,G) を短く $E\xrightarrow{\pi}M$ あるいは E と表すことがある．厳密になことを言えば，ファイバー束の定義は M の特別な被覆 $\{U_i\}$ の選び方によってはならない．数学的記述では，上の定義は**座標束** $(E,\pi,M,F,G,\{U_i\},\{\phi_i\})$ を定めるのに用いられる．2 つの座標束 $(E,\pi,M,F,G,\{U_i\},\{\phi_i\})$ と $(E,\pi,M,F,G,\{V_i\},\{\psi_i\})$ は，$(E,\pi,M,F,G,\{U_i\}\cup\{V_i\},\{\phi_i\}\cup\{\psi_i\})$ が再び座標束になるとき，**同値**であるといわれる．このとき，ファイバー束は，座標束の同値類として定義される．物理学における実際の応用上は，常にある決まった被覆を選ぶので，座標束とファイバー束との違いはない．]

ここではいくつかの点を明らかにしておく必要がある．まず，底空間 M のチャート U_i を選ぶ．$\pi^{-1}(U_i)$ は，直積 $U_i\times F$ に微分同相であり，$\phi_i^{-1}:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times F$ は微分同相写像である．もし $U_i\cap U_j\neq\emptyset$ ならば，$U_i\cap U_j$ 上で 2 つの写像 ϕ_i と ϕ_j が得られる．そこで，$\pi(u)=p\in U_i\cap U_j$ を満たすような点 u を選ぼう．このとき，ファイバー F の 2 つの元を 1 つは ϕ_i^{-1} により，もう一方には ϕ_j^{-1} により，

$$\phi_i^{-1}(u)=(p,f_i),\ \phi_j^{-1}(u)=(p,f_j) \tag{9.5}$$

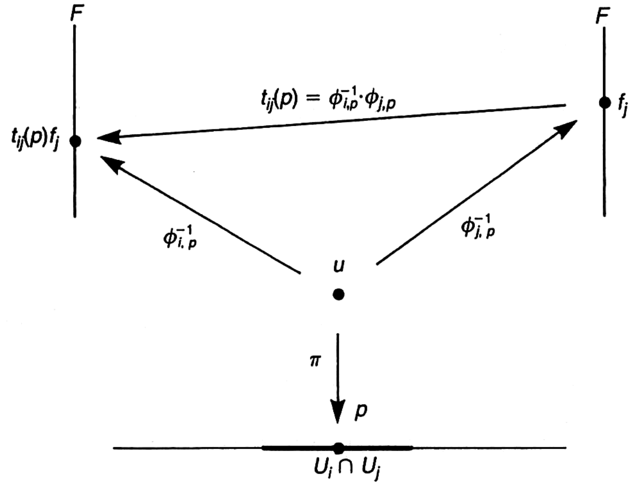


図 9.2. 共通部分 $U_i \cap U_j$ の上では，2つの元 $f_i, f_j \in F$ が $u \in \pi^{-1}(p), p \in U_i \cap U_j$ に対応する．それらは $t_{ij}(p)$ によって，$f_i = t_{ij}(p)f_j$ という関係にある．

と定める．図 9.2 を参照．f_i と f_j を $f_i = t_{ij}(p)f_j$ により関係づける写像 $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ が存在する．これは，また (9.4) 式としてもかける．

このような変換関数は，次の両立条件を満たす必要がある．

$$t_{ii}(p) = \text{恒等写像} \qquad (p \in U_i) \tag{9.6a}$$

$$t_{ij}(p) = t_{ji}(p)^{-1} \qquad (p \in U_i \cap U_j) \tag{9.6b}$$

$$t_{ij}(p) \cdot t_{jk}(p) = t_{ik}(p) \qquad (p \in U_i \cap U_j \cap U_k) \tag{9.6c}$$

これらの条件が満たされないと，ファイバー束の局所部分どうしがうまく貼り合わされない．もしも，すべての変換関数が恒等写像に取ることができる場合，そのファイバー束は**自明束**であるとよばれる．自明束は，直積 $M \times F$ である．

ファイバー束 $E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられても，変換関数の可能な集合は，明らかに一意的とは限らない．$\{U_i\}$ を M の被覆で，$\{\phi_i\}$ と $\{\tilde{\phi}_i\}$ を同じファイバー束をあたえる局所自明化の2つの集合とする．おのおのの自明化の変換関数を

$$t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} \tag{9.7a}$$

$$\tilde{t}_{ij}(p) = \tilde{\phi}_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{j,p} \tag{9.7b}$$

とおく．そこで，各点 $p \in M$ で写像 $g_i(p) : F \to F$ を

$$g_i(p) \equiv \phi_{i,p}^{-1} \circ \tilde{\phi}_{i,p} \tag{9.8}$$

で定義する．$g_i(P)$ は，G に属する同相写像である必要がある．この要請は，$\{\phi_i\}$ と $\{\tilde{\phi}_i\}$ が同じファイバー束を定めるならば，確かに満たされなければならない．式 (9.7) と (9.8) から容易に

$$\tilde{t}_{ij}(p) = g_i(p)^{-1} \circ t_{ij}(p) \circ g_j(p) \tag{9.9}$$

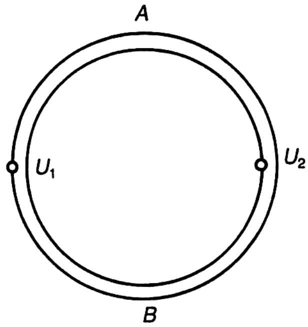


図 9.3. 底空間 S^1 とその上でファイバー束が自明になる 2 つのチャート U_1 と U_2.

であることがわかる．後に論ずる実際の設定では，t_{ij} は局所座標の張り合わせで必要となるゲージ変換であり，一方 g_i はチャート U_i の中でのゲージの自由度に対応する．もしファイバー束が自明ならば，すべての変換関数を恒等写像に取ればよい．すると変換関数の最も一般的な形は

$$t_{ij}(p) = g_i(p)^{-1} g_j(p) \tag{9.10}$$

となる．

さて，$E \xrightarrow{\pi} M$ をファイバー束とする．このとき，**切断**（あるいは**断面**）とは滑らかな写像 $s : M \to E$ で，$\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ を満たすものである．明らかに，$s(p) = s|_p$ は $F_p = \pi^{-1}(p)$ の元である．M 上の断面全体の集合を $\Gamma(M, E)$ とあらわす．$\Gamma(U, E)$ は U 上の局所断面全体の集合をあらわす．例えば，$\Gamma(M, TM)$ はベクトル場全体 $\mathcal{X}(M)$ と同一視される．すべてのファイバー束が大域的な断面をもつわけではないことに注意すべきである．

例 9.1 E を典型ファイバー $[-1, 1]$ をもつファイバー束 $E \xrightarrow{\pi} S^1$ とする．$U_1 = (0, 2\pi)$ と $U_2 = (-\pi, \pi)$ を S^1 の開被覆とし，$A = (0, \pi)$ と $B = (\pi, 2\pi)$ を交わり $U_1 \cap U_2$ とする．図 9.3 を参照．局所自明化 ϕ_1 と ϕ_2 は $\theta \in A$, $t \in F$ に対して

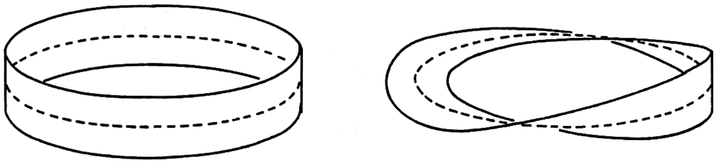
$$\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t), \quad \phi_2^{-1}(u) = (\theta, t)$$

で与えられる．$\theta \in A$ に対する変換関数 $t_{12}(\theta)$ は恒等写像 $t_{12}(\theta) : t \mapsto t$ である．B 上では 2 つの選び方がある；

(I) $\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t), \qquad \phi_2^{-1}(u) = (\theta, t)$

(II) $\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t), \qquad \phi_2^{-1}(u) = (\theta, -t)$

(I) の場合 $t_{12}(\theta)$ は恒等写像であり，局所自明な 2 つの束を貼り付けて円筒（図 9.4(a)）ができる．(II) の場合 $t_{12}(\theta) : t \mapsto -t$, $\theta \in B$ なので **Möbius の帯**（図 9.4(b)）がえられる．したがって，円筒は自明な構造群 $G = \{e\}$ をもつ．ここで e は F から F への恒等写像である．Möbius の帯の場合は $G = \{e, g\}$ であり，$g : t \mapsto -t$ である．$g^2 = e$ なので $G \cong \mathbb{Z}_2$ が導かれる．円筒は自明束 $S^1 \times F$ であり，Möbius の帯は自明束ではない．[注：群 $\mathbb{Z}_2$ は Lie 群ではない．しかし我々が扱う構造群が離散群となる場合はこれだけである．]



(a)　　(b)

図 9.4. S^1 上の2つのファイバー束：(a) 自明束 $S^1 \times I$ である円筒；(b) Möbius の帯

9.2.2 ファイバー束の再構成

ファイバー束を構成するために必要最小限の情報は何であろうか？　ここでは $M, \{U_i\}, t_{ij}(p), F, G$ があたえられると，ファイバー束を再構成することができることを示す．これはあたえられたデータから一意に定まる π, E, ϕ_i を求めることにあたる．まずは

$$X \equiv \bigcup_i U_i \times F \tag{9.11}$$

を定義しよう．そこで $(p, f) \in U_i \times F$ と $(q, f') \in U_j \times F$ の間に同値関係 $\sim$ を，$p = q, f' = t_{ij}(p) f$ のとき，またそのときに限って $(p, f) \sim (q, f')$ として定める．このときファイバー束 E は

$$E = X / \sim \tag{9.12}$$

によって定義される．E の元を $[(p, f)]$ によってあらわす．束の射影は

$$\pi : [(p, f)] \mapsto p \tag{9.13}$$

によってあたえられる．局所自明化 $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ は

$$\phi_i : (p, f) \mapsto [(p, f)] \tag{9.14}$$

であたえられる．読者はこうして定義された $E, \pi, \{\phi_i\}$ がファイバー束のすべての公理を満たすことを確かめられたい．したがってあたえられたデータはファイバー束 E を一意に再構成することがわかる．

この手続きは，既存のファイバー束から新しいファイバー束を構成する目的でも用いることができる．(E, π, M, F, G) をファイバー束とする．このファイバー束に同伴する新しい束は底空間が M, 変換関数が $t_{ij}(p)$, 構造群が G,G が作用するファイバーが F' となるものである．同伴束の例は後であたえよう．

9.2.3 束写像

$E \xrightarrow{\pi} M$ と $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ をファイバー束とする．滑らかな 写像 $\bar{f} : E' \to E$ が**束写像**であるとは，E' の各ファイバー F'_p を F_q の上にうつすもののことである．このとき写像 $\bar{f}$ は

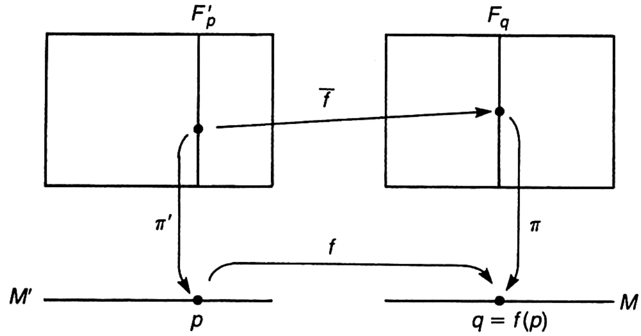


図 **9.5.** 束写像 $\bar{f}: E' \to E$ は写像 $f: M' \to M$ を誘導する.

自然に滑らかな写像 $f: M' \to M$ で $f(p) = q$ (図 9.5) となるものを誘導する．図式

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M' & \xrightarrow{f} & M \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{f}(u) \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ p & \xrightarrow{f} & q \end{array} \right) \tag{9.15}$$

が可換であることを確かめよ.

[注意：滑らかな写像 $\bar{f}: E' \to E$ は必ずしも束写像であるとは限らない．E' の点 $u, v \in F'_p$ を E の 異なる ファイバーで $\pi(\bar{f}(u)) \neq \pi(\bar{f}(v))$ 上の $\bar{f}(u)$ と $\bar{f}(v)$ にうつすことがあるかもしれない．]

9.2.4 同値な束

2つのファイバー束 $E' \xrightarrow{\pi'} M$ と $E \xrightarrow{\pi} M$ が**同値**であるとは，束写像 $\bar{f}: E' \to E$ が存在して $f: M \to M$ が恒等写像で $\bar{f}$ が微分同相写像となるときをいう：

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{\mathrm{id}_M} & M \end{array} \tag{9.16}$$

同値な束のこの定義は，定義 9.1 の直後の注における定義とも一致する.

9.2.5 引き戻し束

$E \xrightarrow{\pi} M$ を典型ファイバー F をもつファイバー束とする．写像 $f: N \to M$ があたえられと，対 (E, f) は同じファイバー F をもつ N 上の新しいファイバー束を定める（図 9.6)．f^*E を $N \times E$ の部分空間で $f(p) = \pi(u)$ を満たす点 (p, u) からなるものとする．$f^*E \equiv \{(p, u) \in N \times E | f(p) = \pi(u)\}$ を f による E の**引き戻し**とよぶ．f^*E のファイバー F_p はちょうど E のファイバー $F_{f(p)}$ のコピーである．$f^*E \xrightarrow{\pi_1} N$ を $\pi_1: (p, u) \mapsto p$ により，$f^*E \xrightarrow{\pi_2} E$ を $\pi_2: (p, u) \mapsto U$ により定義すれば，引き戻し f^*E にはファイバー束構

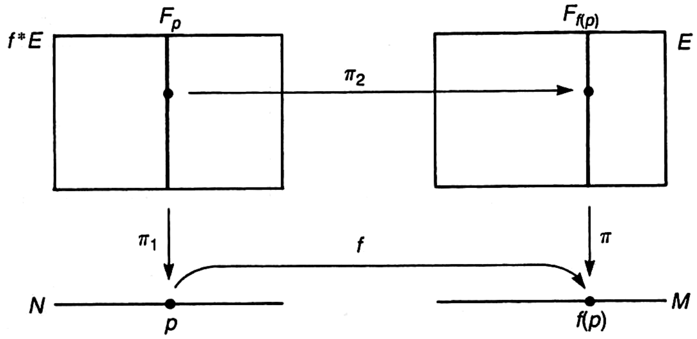


図 9.6. ファイバー束 $E \xrightarrow{\pi} M$ があたえられると，写像 $f: N \to M$ は N 上の引き戻し束 f^*E を定める．

造があたえられ，つぎのような束写像が得られる．

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} (p,u) & \xrightarrow{\pi_2} & u \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ p & \xrightarrow{f} & f(p) \end{array}\right) \tag{9.17}$$

図式の可換性は $(p,u) \in f^*E$ に対して，$\pi(\pi_2(p,u)) = \pi(u) = f(p) = f(\pi_1(p,u))$ であることからしたがう．とくに $N = M$ で $f = \mathrm{id}_M$ ならば2つのファイバー束 f^*E と E は同値である．

$\{U_i\}$ を M の開被覆で，$\{\phi_i\}$ を局所自明化とする．すると $\{f^{-1}(U_i)\}$ は f^*E が局所自明となるような N の開被覆を定める．ある点 $p \in N$ に対して，$\pi(u) = f(p) \in U_i$ となるような $u \in E$ を取る．もし，$\phi_i^{-1}(u) = (f(p), f_i)$ ならば ψ_i を f^*E の自明化とするとき $\psi_i^{-1}(p,u) = (p, f_i)$ が求められる．点 $f(p) \in U_i \cap U_j$ における変換関数 t_{ij} は f_j を $f_i = t_{ij}(f(p))f_j$ にうつす．点 $p \in f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j)$ における f^*E の対応する変換関数 t_{ij}^* もまた，f_j を f_i にうつす；図 9.7 を参照．このことは

$$t_{ij}^* = t_{ij}(f(p)) \tag{9.18}$$

が成り立つことを示している．

例 9.2 M と N を次元 $\dim M = \dim N = m$ の微分可能多様体とする．$f: N \to M$ を滑らかな写像とする．このとき，写像 f はつぎの図式を可換にするような写像 $\pi_2 : TN \to TM$ を誘導する．

$$\begin{array}{ccc} TN & \xrightarrow{\pi_2} & TM \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \tag{9.19}$$

$W = W^\nu \partial/\partial y^\nu$ を T_pN のベクトル，$V = V^\mu \partial/\partial x^\mu$ を $T_{f(p)}M$ の対応するベクトルとする．TN が引き戻し束 $f^*(TM)$ ならば，π_2 は T_pN を $T_{f(p)}M$ に同型に写す．これは π_2 が N の各点で最大階数をもつとき，またそのときに限って可能である．$\varphi(f(p)) = (f^1(y), \ldots, f^m(y))$

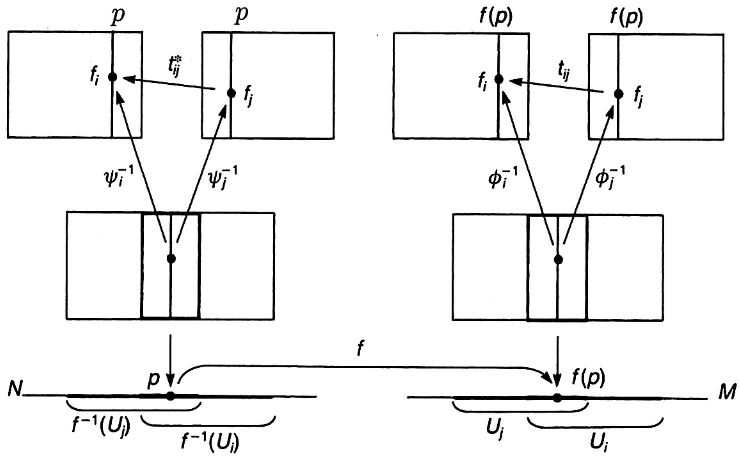


図 **9.7.** 引き戻し束 f^*E の変換関数 t^*_{ij} は E の変換関数 t_{ij} の引き戻しである.

を $f(p)$ の M のチャート (U,φ) における座標とする. ただし, ここで $y=\psi(p)$ は p の N のチャート (V,ψ) における座標である. このとき最大階数をもつという条件は, $p\in N$ に対して $\det(\partial f^\mu(y)/\partial y^\nu)_p \neq 0$ で与えられる.

9.2.6 ホモトピー公理

f と g を M' から M への連続写像とする. このとき, 連続写像 $F: M'\times[0,1]\to M$ が存在して, 任意の $p\in M'$ に対して $F(p,0)=f(p)$ かつ $F(p,1)=g(p)$ が成り立つならば写像 f と g は**ホモトピック**であるとよばれる. §4.2 を参照.

定理 9.1 $E\stackrel{\pi}{\longrightarrow}M$ をファイバーが F のファイバー束, f と g を N から M へのホモトピックな写像とする. このとき f^*E と g^*E は N 上の同値な束である.

証明は Steenrod (1951) にある. M を可縮な多様体とする. このとき, ホモトピー $F: M\times I\to M$ が存在して

$$F(p,0)=p, \quad F(p,1)=p_0$$

を満たす. ここで $p_0\in M$ はある決まった一点である. $E\stackrel{\pi}{\longrightarrow}M$ を M 上のファイバー束とし, $h_t(p)\equiv F(p,t)$ とするとき引き戻し束 h_0^*E と h_1^*E を考える. ファイバー束 h_1^*E は一点 p_0 上で定義されているので, 自明束である; $h_1^*E\simeq\{p_0\}\times F$. 一方, h_0 は恒等写像なので $h_0^*E=E$ である. 定理 9.1 によれば, $h_0^*E=E$ は h_1^*E に同値であるので, E は自明束である. 例えば, 接束 $T\mathbb{R}^m$ は自明束である. したがって, つぎの系を得たことになる.

系 9.1 $E\stackrel{\pi}{\longrightarrow}M$ をファイバー束とする. もし M が可縮ならば E は自明である.

9.3 ベクトル束

9.3.1 定義と例

ベクトル束 $E \stackrel{\pi}{\longrightarrow} M$ はファイバーがベクトル空間であるファイバー束である．F を $\mathbb{R}^k$, M を m 次元多様体とする．全空間 E は $m+k$ 次元であるが，通常 k をファイバー次元といい，$\dim E$ であらわす．変換関数は，ファイバーであるベクトル空間を同次元の別のベクトル空間に同型に写すので $\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ に属する．もし，ファイバー F が複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^k$ ならば，構造群は $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$ である．

例 9.3 m 次元多様体 M 上の接束 TM は，典型ファイバーが $\mathbb{R}^m$ のベクトル束である．§9.1 を参照．u を TM の点で，M の被覆 $\{U_i\}$ に対して，$\pi(u)=p\in U_i\cap U_j$ を満たすものとする．$x^\mu=\varphi_i(p)$ $(y^\mu=\varphi_j(p))$ を U_i (U_j) の座標系とする．u に対応するベクトル V は $V=V^\mu\partial/\partial x^\mu|_p=\tilde{V}^\mu\partial/\partial y^\mu|_p$ と表される．このとき，局所自明化は

$$\phi_i^{-1}(u)=(p,\{V^\mu\}),\qquad \phi_j^{-1}(u)=(p,\{\tilde{V}^\mu\}) \tag{9.20}$$

で与えられる．ファイバー座標 $\{V^\mu\}$ と $\{\tilde{V}^\mu\}$ の間には

$$V^\mu=G^\mu{}_\nu(p)\tilde{V}^\nu \tag{9.21}$$

という関係がある．ここで，$\{G^\mu{}_\nu(p)\}=\{(\partial x^\mu/\partial y^\nu)_p\}\in\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ である．ゆえに，接束とは $(TM,\pi,M,\mathbb{R}^m,\mathrm{GL}(m,\mathbb{R}))$ のことである．TM の切断は，M 上のベクトル場である；$\mathcal{X}(M)=\Gamma(M,TM)$.

具体的に，TS^2 を例にとってみよう．$U_N\equiv S^2-\{$ 南極点 $\}$ と $U_S\equiv S^2-\{$ 北極点 $\}$ を S^2 の開被覆としよう．(X,Y) と (U,V) をそれぞれ立体射影座標とする（例 8.1）．二つの座標の間には

$$U=X/(X^2+Y^2)\qquad V=-Y/(X^2+Y^2) \tag{9.22}$$

という関係がある．そこで，$u\in TS^2$ を $\pi(u)=p\in U_\mathrm{N}\cap U_\mathrm{S}$ を満たすように選ぶ．ϕ_N と ϕ_S を各々 $\phi_\mathrm{N}^{-1}(u)=(p,V_\mathrm{N}^\mu)$, $\phi_\mathrm{S}^{-1}(u)=(p,V_\mathrm{S}^\mu)$ となるようような局所自明化とする．このとき，変換関数は

$$t_\mathrm{SN}(p)=\frac{\partial(U,V)}{\partial(X,Y)}=\frac{1}{r^2}\begin{pmatrix}-\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix} \tag{9.23}$$

となる．ただし，ここで $X=r\cos\theta$, $Y=r\sin\theta$ とおいている．接ベクトルの各成分の変換は，角度 2θ の $\{V_i^\mu\}$ の回転およびその後のスケール変換からなる．読者は，このとき $t_\mathrm{NS}(p)=t_\mathrm{SN}(p)^{-1}$ が成り立つことを確かめられたい．

例 9.4 M を $\mathbb{R}^{m+k}$ に埋め込まれた m 次元多様体とする．N_pM を $\mathbb{R}^{m+k}$ において T_pM に垂直なベクトル空間，すなわち $\mathbb{R}^{m+k}$ におけるユークリッド計量に関して，任意の $U\in N_pM$, $V\in T_pM$ に対して $U\cdot V=0$ が成り立つものとする．ベクトル空間 N_pM は $\mathbb{R}^k$ に同型である．このような**法束**

$$NM\equiv\bigcup_{p\in M}N_pM$$

は，典型ファイバー $\mathbb{R}^k$ をもつベクトル束である．

例えば，$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた 2 次元球面 S^2 を考えてみよう．法束 NS^2 は，S^2 を垂直に貫く直線の集まりと見なせるから，NS^2 は自明束 $S^2 \times \mathbb{R}$ である．

ファイバーが 1 次元（$F = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）のベクトル束を**直線束**とよぶ．$S^1 \times \mathbb{R}$ は，自明な $\mathbb{R}$-直線束である．開 Möbius の帯もまた実直線束である．構造群は，$\mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R} - \{0\}$ または $\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$ で，可換群である．

以下の議論で，**標準直線束** L をしばしば考えることになるので，定義を与えておこう．まずは，$\mathbb{C}P^n$ の元 p は $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点を通る複素直線であったことを思い出しておこう（例 8.4）．ベクトル束 L のファイバー $\pi^{-1}(p)$ は，$\mathbb{C}^{n+1}$ において，p が属する直線として定義される．形式的には，$I^{n+1} \equiv \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ を $\mathbb{C}P^n$ 上の自明束とあらわし，I^{n+1} の元を $p \in \mathbb{C}P^n, v \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して (p, v) とするとき，

$$L \equiv \{(p, v) \in I^{n+1} | v = ap,\ a \in \mathbb{C}\}$$

によって定義される．射影は，対応 $(p, v) \stackrel{\pi}{\longrightarrow} p$ である．

例 9.5（自明な）複素直線束 $L \equiv \mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}$ は，$\mathbb{R}^3$ 上で定義される非相対論的量子力学に伴ってあらわれる．波動関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ は，単に L の切断である．

§1.3 で扱った磁気モノポールの場における波動関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ を考えよう．モノポールが原点にあるとき，$\psi(x)$ は $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ 上で定義されるので，$\mathbb{R}^3 - \{0\}$ 上の複素直線束が得られる．モノポールの周りの S^2 上の波動関数のみに関心があるならば，S^2 上の複素直線束が得られる．S^2 は $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ の変形収縮であることに注意せよ．

9.3.2 フレーム

接束 TM 上では，各ファイバーはチャート U_i 上の局所座標系 x^μ による自然な基底 $\{\partial/\partial x^\mu\}$ をもつ．M に計量が与えられていれば，直交基底 $\{\hat{e}_\alpha\}$ を用いてもよい．$\partial/\partial x^\mu$ あるいは $\{\hat{e}_\alpha\}$ は U_i 上のベクトル場であり，基底の集合 $\{\partial/\partial x^\mu\}$ あるいは $\{\hat{e}_\alpha\}$ は U_i 上の一次独立なベクトル場をなす．U_i 上ではいつでも m 個の一次独立なベクトル場を選ぶことが可能であるが M 全体で可能とは限らない．定義から基底ベクトルの成分は

$$\partial/\partial x^\mu = (0,\ \ldots,\ 0,\ \underset{\mu}{1},\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

あるいは

$$\hat{e}_\alpha = (0,\ \ldots,\ 0,\ \underset{\alpha}{1},\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

である．これらのベクトルは，U_i 上の（局所）**フレーム**を定義する．下の議論を参照せよ．

$E \stackrel{\pi}{\longrightarrow} M$ をファイバーが $\mathbb{R}^k$（あるいは $\mathbb{C}^k$）のベクトル束とする．チャート U_i 上で，$\pi^{-1}(U_i)$ は自明，すなわち $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^k$，であるようにでき，また U_i 上で k 個の一

次独立な切断 $\{e_1(p),\dots,e_k(p)\}$ を選ぶことができる．これらの切断は，U_i 上のフレームを定めるといわれる．U_i 上のフレームが与えられると，

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) \longmapsto \{V^\alpha\} \in F \tag{9.24}$$

で与えられる自然な写像 $F_p \to F$ $(= \mathbb{R}^k$ あるいは $\mathbb{C}^k)$ が得られる．局所自明写像は

$$\phi_i^{-1}(V) = (p, \{V^\alpha(p)\}) \tag{9.25}$$

で与えられる．定義により，

$$\phi_i\ (p, \{0,\ \dots,\ 0,\ \underset{\alpha}{1},\ 0,\ \dots,\ 0\})\ = e_\alpha(p) \tag{9.26}$$

を得る．

$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ におけるフレームの変換を考える．$p \in U_i \cap U_j$ のとき，U_i 上で，フレーム $\{e_1(p),\dots,e_k(p)\}$, U_j 上で，フレーム $\{\tilde{e}_1(p),\dots,\tilde{e}_k(p)\}$ が与えられたとする．このとき，ベクトル $\tilde{e}_\beta(p)$ は

$$\tilde{e}_\beta(p) = e_\alpha(p) G(p)^\alpha{}_\beta \tag{9.27}$$

と表される．ここで，$G(p)^\alpha{}_\beta \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ あるいは $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$ である．また，任意のベクトル $V \in \pi^{-1}(p)$ は

$$V = V^\alpha e_\alpha(p) = \tilde{V}^\alpha \tilde{e}_\alpha(p) \tag{9.28}$$

と表される．すると，(9.27) と (9.28) から

$$\tilde{V}^\beta = G^{-1}(p)^\beta{}_\alpha V^\alpha \tag{9.29}$$

が求まる．ここで，$G^{-1}(p)^\beta{}_\alpha G(p)^\alpha{}_\gamma = G(p)^\beta{}_\alpha G^{-1}(p)^\alpha{}_\gamma = \delta^\beta{}_\gamma$ である．したがって，変換関数 $t_{ij}(p)$ は行列 $G^{-1}(p)$ で与えられることがわかる．

9.3.3　余接束と双対束

余接束 $T^*M \equiv \bigcup_{p\in M} T_p^*M$ が接束と同様に定義される．座標が x^μ のチャート U_i 上で，T_p^*M の基底は $\{\mathrm{d}x^1,\dots,\mathrm{d}x^m\}$ で，これは $\{\partial/\partial x\}$ に双対である．y^μ を $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ であるような U_j の座標とする．$p \in U_i \cap U_j$ に対して，変換

$$\mathrm{d}y^\mu = \mathrm{d}x^\nu \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\right)_p \tag{9.30}$$

を得る．1-形式 ω はそれぞれの座標系で

$$\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu = \tilde{\omega}_\mu \mathrm{d}y^\mu$$

と表されるが，このことから

$$\tilde{\omega}_\mu = G_\mu{}^\nu(p)\omega_\nu \tag{9.31}$$

が求まる．ここで，$G_\mu{}^\nu(p) \equiv (\partial x^\nu/\partial y^\mu)_p$ は変換関数 $t_{ji}(p)$ に対応する．$\Gamma(M, T^*M) = \Omega^1(M)$ に注意せよ．

上で定義した余接束はもっと一般の場合に容易に拡張される．ファイバー F のベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ が与えられると，その**双対束** $E^* \xrightarrow{\pi} M$ が定義できる．E^* のファイバー F^* は，F から $\mathbb{R}$（あるいは $\mathbb{C}$）への線形写像全体の集合である．F_p の一般的な基底 $\{e_\alpha(p)\}$ が与えられたとき，F_p^* の双対基底 $\{\theta^\alpha(p)\}$ を $\langle\theta^\alpha(p), e_\beta(p)\rangle = \delta^\alpha{}_\beta$ によって定義する．

9.3.4 ベクトル束の切断

s と s' をベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ の切断とする．ベクトルの和とスカラー積は各点ごとに

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p) \tag{9.32a}$$

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \tag{9.32b}$$

と定義されている．ここで，$p \in M, f \in \mathcal{F}(M)$ である．各ファイバーのゼロベクトル 0 は，$\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ あるいは $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ の左作用のもとで不変であり，特別な役割を果たす．任意のベクトル束 E は，任意の自明化において $\phi_i^{-1}(s_0(p)) = (p, 0)$ となる**零切断** $s_0 \in \Gamma(M, E)$ とよばれる大域的な切断をもつ．

例えば，$\mathbb{C}P^n$ 上の標準的直線束 L の切断を考えよう．$\xi^\nu{}_{(\mu)}$ を U_μ 上の非斉次座標とする．U_μ 上の局所切断 s_μ はつぎの形をしている．

$$s_\mu = \{\xi^0{}_{(\mu)}, \ldots, 1, \ldots, \xi^n{}_{(\mu)}\} \in \mathbb{C}^{n+1}$$

このとき，一つの座標系から他の座標系への変換は，スカラー倍で与えられる：$s_\nu = (z^\mu/z^\nu)s_\mu$．$L^*$ を L の双対束とする．s_μ に対応して，双対切断 s_μ^* を $s_\mu^*(s_\mu) = 1$ を満たすように選ぶことができる．このことから，s_μ^* の変換関数が $s_\nu^* = (z^\nu/z^\mu)s_\mu^*$ で与えられることがわかる．

ファイバー計量 $h_{ij}(p)$ も各点ごとに定義される．s と s' を U_i 上の切断とする．p における s と s' の間の内積は，ファイバーを $\mathbb{R}^k$ ならば

$$(s, s')_p = h_{ij}(p)s^i(p)s'^j(p) \tag{9.33a}$$

で定義し，ファイバーが $\mathbb{C}^k$ ならば

$$(s, s')_p = h_{ij}(p)\overline{s^i(p)}s'^j(p) \tag{9.33b}$$

で定義する．この内容については，§10.4 でさらに詳しく触れる．

9.3.5 積束と Whitney 和束

$E \xrightarrow{\pi} M$ と $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ をそれぞれファイバー F と F' をもつベクトル束とする．**積束**

$$E \times E' \xrightarrow{\pi \times \pi'} M \times M' \tag{9.34}$$

は，その典型ファイバーが $F \oplus F'$ であるファイバー束のことである．[$F \oplus F'$ におけるベクトルは

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \text{ここで } V \in F \text{ かつ } W \in F'$$

と書かれる．ベクトルの和とスカラー積は

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V' \\ W' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V + V' \\ W + W' \end{pmatrix}$$

と

$$\lambda \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda V \\ \lambda W \end{pmatrix}$$

によって定義される．$\{e_\alpha\}$ と $\{f_\beta\}$ をそれぞれ F と F' の基底とする．このとき，$\{e_\alpha\} \cup \{f_\beta\}$ は $F \oplus F'$ の基底であり，$\dim(F \oplus F') = \dim F + \dim F'$ である．] また，$\pi(u) = p, \pi'(u') = p'$ ならば，射影 $\pi \times \pi'$ は $(u, u') \in E \times E'$ に

$$\pi \times \pi'(u, u') = (p, p') \tag{9.35}$$

と作用する．(p, p') におけるファイバーは，$F_p \oplus F'_{p'}$ である．例えば，$M = M_1 \times M_2$ ならば，$TM = TM_1 \times TM_2$ を得る．

$E \xrightarrow{\pi} M$ と $E' \xrightarrow{\pi'} M$ をそれぞれファイバー F と F' をもつ同じ底空間上のベクトル束とする．**Whitney 和束** $E \oplus E'$ とは，$f(p) = (p, p)$ で定義される $f : M \to M \times M$ による $E \times E'$ の引き戻しのことである．

$$\begin{array}{ccc} E \oplus E' & \xrightarrow{\pi_2} & E \times E' \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi \times \pi'} \\ M & \xrightarrow{f} & M \times M \end{array} \tag{9.36}$$

したがって，$E \oplus E' = \{(u, u') \in E \times E' | \pi \times \pi'(u, u') = (p, p)\}$ である．Whitney 和束のファイバーは，$F \oplus F'$ である．$(\pi \times \pi')^{-1}(p)$ は，$\pi^{-1}(p) \oplus \pi'^{-1}(p) = F_p \oplus F'_p$ に同型である．別の言い方では，点 p におけるファイバーが $F_p \oplus F'_p$ の M 上の束である．$\{U_i\}$ を M の開被覆とし，$\{t^E_{ij}\}$ と $\{t^{E'}_{ij}\}$ をそれぞれ E と E' の変換関数とする．このとき，$E \oplus E'$ の変換関数 T_{ij} は，$(\dim F + \dim F') \times (\dim F + \dim F')$ 次の行列

$$T_{ij}(p) = \begin{pmatrix} t^E_{ij}(p) & 0 \\ 0 & t^{E'}_{ij}(p) \end{pmatrix} \tag{9.37}$$

である．$T_{ij}(p)$ は $F \oplus F'$ に左から作用する．

例 9.6 $\mathbb{R}^3$ で定義される二つの束 $E = TS^2, E' = NS^2$ を考える．$p, q \in S^2, V \in \mathbb{R}^2, W \in \mathbb{R}$ に対して，その局所自明化がそれぞれ $\phi_i^{-1}(u) = (p, V), \psi_i^{-1}(v) = (q, W)$ である $u \in TS^2$ と $v \in NS^2$ をとる．(u, v) が <u>積束</u> $E \times E'$ の点ならば，一つの局所自明化 $\Phi_{i,j} = \phi_i \times \psi_j$ で

$$\Phi_{i,j}^{-1}(u, v) = (p, q; V, W) \tag{9.38a}$$

となるものが得られる．一方，$(u,v) \in E \oplus E'$ ならば，u と v はより強い条件 $\pi(u) = \pi'(v)$ ($= p$ とおく) を満たす．したがって

$$\Phi_i^{-1}(u,v) = (p; V, W) \tag{9.38b}$$

を得る．S^2 が $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているとして，Whitney 和 $TS^2 \oplus NS^2$ は S^2 上の自明束であり，ファイバーは $\mathbb{R}^3$ に同型である．

9.3.6 テンソル積束

$E \xrightarrow{\pi} M$ と $E' \xrightarrow{\pi'} M$ を M 上のベクトル束とする．**テンソル積束** $E \otimes E'$ は各点 $p \in M$ に対して，ファイバーのテンソル積 $F_p \otimes F'_p$ を対応させることによって得られる．$\{e_\alpha\}$ と $\{f_\beta\}$ が F と F' の基底ならば，$F \otimes F'$ は $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}$ によって張られ，ゆえに $\dim(E \otimes E') = \dim E \times \dim E'$ である．

$\bigotimes^r E \equiv E \otimes \cdots \otimes E$ を E の r 回テンソル積束とする．$\{e_\alpha\}$ が E のファイバー F の基底ならば，$\bigotimes^r E$ のファイバーは $\{e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_r}\}$ によって張られる．外積 $\wedge$ を

$$e_\alpha \wedge e_\beta \equiv e_\alpha \otimes e_\beta - e_\beta \otimes e_\alpha \tag{9.39}$$

によって定義すれば，$\{e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_r}\}$ によって張られる全反対称なテンソルの束 $\Lambda^r(E)$ が得られる．とくに，M 上の r-形式全体の空間 $\Omega^r(M)$ は $\Gamma(M, \Lambda^r(T^*M))$ と同一視される．

問 9.1 E_1, E_2, E_3 を M 上のベクトル束とする．このとき，$\otimes$ は分配法則を満たすことを示せ：

$$E_1 \otimes (E_2 \oplus E_3) = (E_1 \otimes E_2) \oplus (E_1 \otimes E_3) \tag{9.40}$$

$E_1 \otimes (E_2 \oplus E_3)$ の変換関数を E_1, E_2, E_3 の変換関数を使って表せ．

9.4 主束

9.4.1 諸定義

主束は，構造群 G と同一のファイバー F をもつ．主束 $P \xrightarrow{\pi} M$ は，$P(M,G)$ とも表されることもあり，しばしば M 上の $\boldsymbol{G}$ **束**とよばれることもある．

変換関数は前と同じように，ファイバーに左から作用する．さらに G のファイバー F への右からの作用も定義できる．$u \in \pi^{-1}(U_i)$, $p = \pi(u)$ に対して，$\phi_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$ を $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ で与えられる局所自明化とする．G の $\pi^{-1}(U_i)$ への右作用は，$\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a)$ によって定義される，すなわち任意の $g \in G$ と $u \in \pi^{-1}(p)$ に対して

$$ua = \phi_i(p, g_i a) \tag{9.41}$$

である（図 9.8）．右作用は左作用と可換なので，この定義は局所自明化の取り方にはよらない．実際，$p \in U_i \cap U_j$ なら

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p) g_i a) = \phi_i(p, g_i a)$$

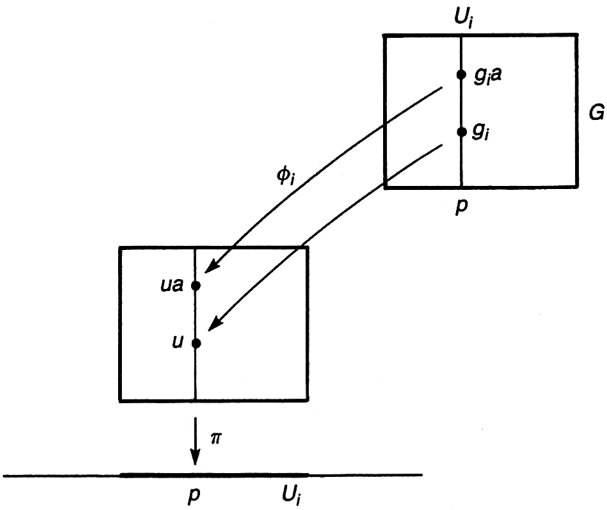


図 9.8. G の P への右作用

である．したがって，右からの積は局所自明化を明示せずに定義される．これは，$P\times G\to P$ あるいは $(u,a)\mapsto ua$ とかかれる．$\pi(ua)=\pi(u)$ であることに注意せよ．G は P に右から推移的に作用し，$F_p=\pi^{-1}(p)$ は G に微分同相なので，G の $\pi^{-1}(p)$ への右作用も推移的である．したがって，任意の $u_1,u_2\in\pi^{-1}(p)$ に対して，G の元 a で $u_1=u_2a$ となるものが存在する．したがって，$\pi(u)=p$ のとき，ファイバー全体を $\pi^{-1}(p)=\{ua|a\in G\}$ として構成することができる．この作用は，自由でもある；ある $u\in P$ に対して $ua=u$ ならば，a は G の単位元 e でなければならない．実際，$u=\phi_i(p,g_i)$ ならば，$\phi_i(p,g_ia)=\phi_i(p,g_i)a=ua=u=\phi_i(p,g_i)$ を得る．ϕ_i は全単射なので，$g_ia=g_i$，すなわち $a=e$ でなければならない．

U_i 上の切断 $s_i(p)$ が与えられたとき，都合のいい局所自明化 $\phi_i:U_i\times G\to\pi^{-1}(U_i)$ をつぎのように定義する．$u\in\pi^{-1}(p),p\in U_i$ に対して，一意に定まる元 $g_u\in G$ で $u=s_i(p)g_u$ となるものが存在する．このとき，ϕ を $\phi^{-1}(u)=(p,g_u)$ で定義する．この局所自明化において，切断 $s_i(p)$ は

$$s_i(p)=\phi_i(p,e) \tag{9.42}$$

と表される．この局所自明化は，**標準的局所自明化**とよばれる．定義により，$\phi_i(p,g)=\phi_i(p,e)g=s_i(p)g$ である．$p\in U_i\cap U_j$ ならば，二つの切断 $s_i(p)$ と $s_j(p)$ は変換関数 $t_{ij}(p)$ によってつぎのように関係づけられる．

$$\begin{aligned}s_i(p)&=\phi_i(p,e)=\phi_j(p,t_{ji}(p)e)=\phi_j(p,t_{ji}(p))\\&=\phi_j(p,e)t_{ji}(p)=s_j(p)t_{ji}(p)\end{aligned} \tag{9.43}$$

例 9.7 P をファイバー $\mathrm{U}(1)=S^1$ をもつ主束で，底空間を S^2 とする．この主束は磁気モノポール（§1.3）の位相幾何学的背景を表している．$\{U_\mathrm{N},U_\mathrm{S}\}$ を S^2 の開被覆で，U_N（U_S）を北（南）半球とする．通常の極座標により S^2 をパラメタ化すると

$$U_\mathrm{N}=\{(\theta,\phi)|0\le\theta\le\pi/2+\varepsilon,0\le\phi<2\pi\}$$

$$U_{\mathrm{S}} = \{(\theta,\phi)|\pi/2-\varepsilon \le \theta \le \pi, 0 \le \phi < 2\pi\}$$

となる．共通部分 $U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}$ は本質的に赤道部分である．ϕ_{N} と ϕ_{S} を局所自明化で

$$\phi_{\mathrm{N}}^{-1}(u) = (p, \exp(\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{N}})), \qquad \phi_{\mathrm{S}}^{-1}(u) = (p, \exp(\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{S}})) \tag{9.44}$$

となるものとする．ここで $p = \pi(u)$ である．$\mathrm{e}^{in\phi}$ の形の変換関数 $t_{\mathrm{NS}}(p)$ を選ぶ．ただし，n は $t_{\mathrm{NS}}(p)$ が赤道上で一意に定まるような整数でなくてはならない．$t_{\mathrm{NS}}(p)$ は，赤道 S^1 を $\mathrm{U}(1)$ にうつすので，この整数は基本群 $\pi_1(\mathrm{U}(1)) = \mathbb{Z}$ を特徴づける．ファイバー座標 α_{N} と α_{S} は赤道上で

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{N}}} = \mathrm{e}^{in\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{S}}} \tag{9.45}$$

によって関係づけられる．もし $n = 0$ ならば，変換関数は $\mathrm{U}(1)$ の単位元であり，自明束 $P = S^2 \times S^1$ を得る．$n \neq 0$ ならば，$\mathrm{U}(1)$ 束 P_n は捻れている．ファイバー束の位相構造が整数によって特徴づけられるのは注目すべきことである．

$\mathrm{U}(1)$ は可換なので，右作用と左作用は同じである．右作用 $g = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$ のもと

$$\phi_{\mathrm{N}}^{-1}(ug) = (p, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_{\mathrm{N}}+\lambda)}) \tag{9.46a}$$

$$\phi_{\mathrm{S}}^{-1}(ug) = (p, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_{\mathrm{S}}+\lambda)}) \tag{9.46b}$$

を得る．右作用は $\mathrm{U}(1)$ ゲージ変換に対応している．

例 9.8 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ のすべての無限遠点を 1 点に同一視すると，1 点コンパクト化 $S^m = \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ が得られる．もし，$\mathbb{R}^m$ 上の自明な G 束が定義されると，このコンパクト化により S^m 上の新しい G 束が得られるが，これは自明とは限らない．P を $\mathbb{R}^4$ の 1 点コンパクト化から得られる S^4 上の $\mathrm{SU}(2)$ 束とする．この主束は，$\mathrm{SU}(2)$ インスタントン（§1.4）を表す．S^4 上の開被覆 $\{U_{\mathrm{N}}, U_{\mathrm{S}}\}$ をつぎのように導入しよう．

$$U_{\mathrm{N}} = \{(x,y,z,t)|x^2+y^2+z^2+t^2 \le R^2+\varepsilon\}$$

$$U_{\mathrm{S}} = \{(x,y,z,t)|R^2-\varepsilon \le x^2+y^2+z^2+t^2\}$$

ここで，R は正定数で，ε は無限小の正数である．薄い共通部分 $U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}$ は本質的には S^3 である．$t_{\mathrm{NS}}(p)$ を点 $p \in U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}$ で定義された変換関数とする．t_{NS} は S^3 を $\mathrm{SU}(2)$ にうつすので，$\pi_3(\mathrm{SU}(2)) = \mathbb{Z}$ によって分類される．束を特徴づける整数は，**インスタントン数**とよばれる．$t_{\mathrm{NS}}(p)$ を単位元に取れば，自明束 $P_0 = S^3 \times \mathrm{SU}(2)$ が得られ，これはホモトピー類 0 に対応する．非自明束はつぎのように得られる．最初に，$\mathrm{SU}(2) \cong S^3$（例 4.12）であったことに注意する．元 $A \in \mathrm{SU}(2)$ は

$$A = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$$

と書ける．ただし，$|u|^2 + |v|^2 = 1$ である．u と v を $u = t + \mathrm{i}z$ と $v = y + \mathrm{i}x$ のように実部と虚部に分ければ，$t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ となる．したがって，$\mathrm{SU}(2)$ は単位球面

S^3 と同一視され，$\pi_3(\mathrm{SU}(2)) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ が S^3 から $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$ への写像を分類する．恒等写像 $f: S^3 \to S^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ は

$$f(x,y,z,t) \mapsto \begin{pmatrix} t+\mathrm{i}z & y+\mathrm{i}x \\ -y+\mathrm{i}x & t-\mathrm{i}z \end{pmatrix}$$
$$= t\mathbf{1} + \mathrm{i}(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) \tag{9.47}$$

であり，ここで

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で，σ_μ は Pauli 行列である．点 $p=(x,y,z,t) \in U_\mathrm{N} \cap U_\mathrm{S}$ をとる．$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2}$ が p の長さを表すとすれば，ベクトル $(x/R, y/R, z/R, t/R)$ の長さは 1 である．点 p に対して，SU(2) の元を

$$t_\mathrm{NS}(p) = \frac{1}{R}\left(t\mathbf{1} + \mathrm{i}\sum_i x^i\sigma_i\right) \tag{9.48}$$

と対応させる．ϕ_N^{-1} と ϕ_S^{-1} を局所自明化

$$\phi_\mathrm{N}^{-1}(u) = (p, g_\mathrm{N}) \qquad \phi_\mathrm{S}^{-1}(u) = (p, g_\mathrm{S}) \tag{9.49}$$

とする．ここで，$p=\pi(u)$ で，$g_\mathrm{N}, g_\mathrm{S} \in \mathrm{SU}(2)$ である．$U_\mathrm{N} \cap U_\mathrm{S}$ 上において

$$g_\mathrm{N} = \frac{1}{R}\left(t\mathbf{1} + \mathrm{i}\sum_i x^i\sigma_i\right) g_\mathrm{S} \tag{9.50}$$

を得る．$(t, \boldsymbol{x})$ が S^3 を 1 周すると，$t_\mathrm{NS}(p)$ は SU(2) 全体を一巡りするので，この束は $\pi_3(\mathrm{SU}(2))$ のホモトピー類 1 に対応する．ホモトピー類 n に対応する変換関数が

$$t_\mathrm{NS}(p) = \frac{1}{R^n}\left(t\mathbf{1} + \mathrm{i}\sum_i x^i\sigma_i\right)^n \tag{9.51}$$

で与えられることを確かめるのは，それほど難しくない．

モノポールとインスタントンについての考察を続けるために，ファイバー束上の接続（ゲージ・ポテンシャル）を導入しなくてならない．次章において，これらのトピックについて再び触れることにしよう．

例 9.9 Hopf は，S^3 が S^2 上の U(1) 束になることを示した．$\mathbb{R}^4$ に埋め込まれた 3 次元単位球面は

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1$$

で与えられる．$z^0 = x^1 + \mathrm{i}x^2, z^1 = x^3 + \mathrm{i}x^4$ とするなら，これは

$$|z^0|^2 + |z^1|^2 = 1 \tag{9.52}$$

となる．S^2 を

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 1$$

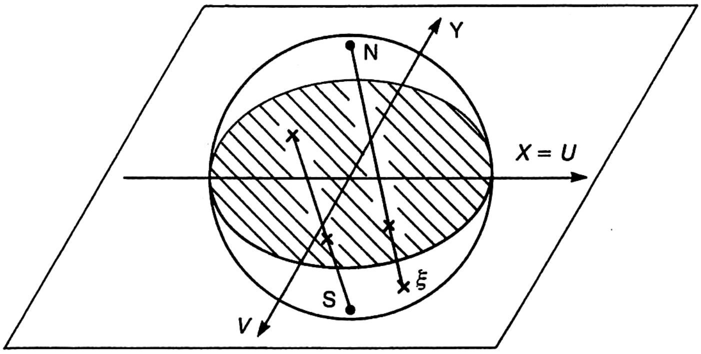


図 **9.9.** 球面 S^2 の立体射影座標．(X,Y) は北極点から射影され，(U,V) は南極点から射影される．

と表す．このとき，**Hopf 写像** $\pi : S^3 \to S^2$ は

$$\begin{aligned} \xi^1 &= 2(x^1x^3 + x^2x^4) \\ \xi^2 &= 2(x^2x^3 - x^1x^4) \\ \xi^3 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 - (x^4)^2 \end{aligned} \tag{9.53}$$

で定義される．

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2]^2 = 1$$

が成り立つから，π は S^3 から S^2 への写像として定義されていることがわかる．

(X,Y) を S^2 の南半球 $U_{\rm S}$ の点の北極点からの立体射影座標とする．S^2 の赤道を通る複素平面をとると，$Z = X + {\rm i}Y$ は半径 1 の円の中にある．すでに例 8.1 で

$$Z = \frac{\xi^1 + {\rm i}\xi^2}{1-\xi^3} = \frac{x^1 + {\rm i}x^2}{x^3 + {\rm i}x^4} = \frac{z^0}{z^1} \qquad (\xi \in U_{\rm S}) \tag{9.54a}$$

であることを求めた（図 9.9）．$\lambda \in {\rm U}(1)$ とすると，Z は変換

$$(z^0, z^1) \mapsto (\lambda z^0, \lambda z^1)$$

のもとで不変であることを確かめよ．$|\lambda| = 1$ であるから，点 $(\lambda z^0, \lambda z^1)$ も S^3 上にある．南極点から射影される北半球 $U_{\rm N}$ の立体射影座標 (U,V) は

$$W = U + {\rm i}V = \frac{\xi^1 - {\rm i}\xi^2}{1+\xi^3} = \frac{x^3 + {\rm i}x^4}{x^1 + {\rm i}x^2} = \frac{z^1}{z^0} \qquad (\xi \in U_{\rm N}) \tag{9.54b}$$

で与えられる．赤道 $U_{\rm N} \cap U_{\rm S}$ 上では $Z = 1/W$ であることに注意．

ファイバー束構造は，つぎのようにして与えられる．最初に，局所自明化を

$$\phi_{\rm S}^{-1} : \pi^{-1}(U_{\rm S}) \to U_{\rm S} \times {\rm U}(1), \quad (z^0, z^1) \mapsto (z^0/z^1, z^1/|z^1|) \tag{9.55a}$$

と

$$\phi_{\rm N}^{-1} : \pi^{-1}(U_{\rm N}) \to U_{\rm N} \times {\rm U}(1), \quad (z^0, z^1) \mapsto (z^1/z^0, z^0/|z^0|) \tag{9.55b}$$

により定義する．

これらの局所自明化は，各チャートの上で矛盾無く定義されていることを確かめよ．例えば，U_{N} 上で $z^0 \neq 0$ であるので，$z^1/z^0 = U + \mathrm{i}V$ と $z^0/|z^0|$ は共に非特異である．赤道上では，$\xi^3 = 0$ なので，$|z^0| = |z^1| = 1/\sqrt{2}$ を得る．したがって，赤道上の局所自明化は

$$\phi_{\mathrm{S}}^{-1} : (z^0, z^1) \mapsto (z^0/z^1, \sqrt{2}z^1) \tag{9.56a}$$

$$\phi_{\mathrm{N}}^{-1} : (z^0, z^1) \mapsto (z^1/z^0, \sqrt{2}z^0) \tag{9.56b}$$

となる．赤道上の変換関数は

$$t_{\mathrm{NS}}(\xi) = \frac{\sqrt{2}z^0}{\sqrt{2}z^1} = \xi^1 + \mathrm{i}\xi^2 \in \mathrm{U}(1) \tag{9.57}$$

である．赤道上を回ると，$t_{\mathrm{NS}}(\xi)$ は複素平面上の単位円周を一回まわるので，U(1) 束 $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ は，$\pi_1(\mathrm{U}(1)) = \mathbb{Z}$ のホモトピー類 1 の元によって特徴づけられる．Trautman (1977), Minami (1979), Ryder (1980) らは，強さ 1 の磁気モノポールが Hopf 写像 $S^3 \xrightarrow{\pi} S^2$ によって記述されることを指摘している．

また，Hopf 写像は別の観点から理解することもできる．S^3 を複素 1 次元球面

$$S^1_{\mathbb{C}} = \{(z^0, z^1) \in \mathbb{C}^2 | |z^0|^2 + |z^1|^2 = 1\}$$

とみなす．そこで，写像 $\pi : S^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}P^1$ を

$$(z^0, z^1) \mapsto [(z^0, z^1)] = \{\lambda(z^0, z^1) | \lambda \in \mathbb{C}\} \tag{9.58}$$

と定義する．この写像のもとで，$\lambda(z^0, z^1), |\lambda| = 1$ である S^3 の点は，$\mathbb{C}P^1 = S^2$ の同じ点にうつされる．これが上で述べた Hopf 写像 $\pi : S^3 \to S^2$ である．これはまた，容易に 4 元数 $\mathbb{H}$ の場合にも一般化される．4 元数代数は，積の規則

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1 \quad \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$$

によって定義される．$\mathbb{H}$ の任意の元は

$$q = t + \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z \tag{9.59}$$

とかかれる．明らかに，単位 4 元数 $|q| = \sqrt{t^2 + x^2 + y^2 + z^2} = 1$ 全体は，$S^3 \cong \mathrm{SU}(2)$ を表す．4 元数 1 次元球面は

$$S^1_{\mathbb{H}} = \{q^0, q^1) \in \mathbb{H}^2 | |q^0|^2 + |q^1|^2 = 1\} \tag{9.60}$$

によって与えられ，S^7 を表す．この場合の Hopf 写像は

$$\pi : S^1_{\mathbb{H}} \to \mathbb{H}P^1 \tag{9.61}$$

の形の対応であり，$\mathbb{H}P^1$ は 4 元数射影空間で，その任意の元は

$$[(q^0, q^1)] = \{\eta(q^0, q^1) \in \mathbb{H}^2 | \eta \in \mathbb{H}\} \tag{9.62}$$

と表される．この写像のもとで，$|\eta| = 1$ を満たす S^7 上の点は $\mathbb{H}P^1 = S^4$ の一つの点にうつされることから，Hopf 写像

$$\pi : S^7 \to S^4 \tag{9.63}$$

が得られる．ファイバーは，単位 4 元数の集合 $S^3 = \mathrm{SU}(2)$ である．Hopf 写像によって定義される変換関数は，$\pi_3(\mathrm{SU}(2)) \cong \mathbb{Z}$ の類 1 に属する．単位強度のインスタントンは，この Hopf 写像により記述される．

8 元数により，Hopf 写像 $\pi : S^{15} \to S^8$ も定義される．しかし，これはファイバー S^7 が群構造をもたないという点で，他の Hopf 写像とは異なる[1]．これまでのところ，この写像の物理学への応用については不明である．

例 9.10 H を Lie 群 G の閉部分 Lie 群とする．このとき，G は H をファイバー，$M \equiv G/H$ を底空間とする主束となることを示そう．H の G への右作用を $g \mapsto ga$, $g \in G, a \in H$ とする．G は Lie 群なので，右作用は微分可能である．そこで，射影 $\pi : G \to M = G/H$ を対応 $\pi : g \mapsto [g] = \{gh | h \in H\}$ によって定義する．明らかに，$g, ga \in G$ は同じ点 $[g]$ にうつされるので，$\pi(g) = \pi(ga)$ $(= [g])$ が成り立つ．局所自明化を定義するために，各チャート U_i 上で写像 $f_i : G \to H$ を定義する必要がある．s を U_i 上の局所切断とし，$g \in \pi^{-1}([g])$ とする．そこで，f_i を $f_i(g) \equiv s([g])^{-1} g$ によって定義する．$s([g])$ は $[g]$ における切断なので，これはある $a \in H$ に対して，ga と表され，したがって $s([g])^{-1} g = a^{-1} g^{-1} g = a^{-1} \in H$ である．このとき，局所自明化 $\phi_i : U_i \times H \to G$ を

$$\phi_i^{-1}(g) = ([g], f_i(g)) \tag{9.64}$$

によって定義する．容易にわかるように，$f_i(ga) = f_i(g)a$ $(a \in H)$ であるから，$\phi_i^{-1}(ua) = (p, f_i(u)a)$ が満たされる．有用な例は

$$\mathrm{O}(n)/\mathrm{O}(n-1) = \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-1) = S^{n-1} \tag{9.65}$$

$$\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1) = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) = S^{2n-1} \tag{9.66}$$

であろう（例 5.17 を参照）．

9.4.2 同伴束

主束 $P(M, G)$ が与えられると，以下のようにその**同伴ファイバー束**を構成することができる．G が多様体 F に左から作用するとする．$g \in G$ の $P \times F$ への作用を

$$(u, f) \to (ug, g^{-1} f) \tag{9.67}$$

で定義する．ここで $u \in P, f \in F$ である．このとき，同伴ファイバー束 (E, π, M, G, F, P) は，2 点 (u, f) と $(ug, g^{-1} f)$ を同一視した商空間 $P \times F/G$ として定義される．

---

[1] 8 元数は，Cayley 数ともいう．8 元数全体は，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であるが体ではない．積に関して，一般に交換法則と結合法則が成り立たない．8 元数について，最近の解説は John. C. Baez, *The Octonions* math.RA/0105155 などがある．

ファイバー F が k 次元ベクトル空間 V である場合を考えよう．ρ を G の k 次元表現とする．このとき，**同伴ベクトル束** $P \times_\rho V$ は，$P \times V$ の点 (u, v) と $(ug, \rho(g)^{-1}v)$ を同一視することによって定義される．ここで，$u \in P, g \in G, v \in V$ である．例えば，M 上のファイバー $\mathbb{R}^k$ のベクトル束は，$P(M, \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}^k))$ に同伴する．同伴束 $E = P \times_\rho V$ のファイバー束として構造は，つぎのように与えられる．まず，射影 $\pi_E : E \to M$ は $\pi_E(u, v) = \pi(u)$ で定義される．この射影は矛盾無く定義されている．実際，$\pi(u) = \pi(ug)$ であることから $\pi_E(ug, \rho(g)^{-1}v) = \pi(ug) = \pi_E(u, v)$ が導かれる．局所自明化は，$\psi_i : U_i \times V \to \pi_E^{-1}(U_i)$ で与えられる．E の変換関数は，$t_{ij}(p)$ を束 P の変換関数として，$\rho(t_{ij}(p))$ によって与えられる．

逆に，ベクトル束は，それに同伴する主束を自然に誘導する．$E \xrightarrow{\pi} M$ を $\dim E = k$（ファイバーは $\mathbb{R}^k$ または $\mathbb{C}^k$）のベクトル束とする．このとき，E は同じ変換関数を用いて，M 上の主束 $P(E) \equiv P(M, G)$ を誘導する．構造群 G は，$\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ または $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ である．$P(E)$ の具体的な構成は，§9.1 で記述した再構成の方法による．

例 9.11 m 次元多様体 M 上の接束 TM に同伴した主束は，**フレーム束** $LM \equiv \bigcup_{p \in M} L_pM$ とよばれる．ここで，L_pM は点 p におけるフレームの集合である．チャート U_i 上に座標 x^μ を入れる．T_pM は U_i 上で自然な基底 $\{\partial/\partial x^\mu\}$ をもつ．点 p における一つのフレーム $u = \{X_1, \ldots, X_m\}$ は

$$X_\alpha = X^\mu{}_\alpha \partial/\partial x^\mu|_p \qquad 1 \leq \alpha \leq m \tag{9.68}$$

と表される．ここで，$(X^\mu{}_\alpha)$ は $\{X_\alpha\}$ が一次独立であるような $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ の元である．そこで，局所自明化 $\phi_i : U_i \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U_i)$ を $\phi_i^{-1}(u) = (p, (X^\mu{}_\alpha))$ によって定義する．LM の束構造は，つぎのように定義される: (a)　$u = \{X_1, \ldots, X_m\}$ が点 p におけるフレームであるとき，$\pi_L : LM \to M$ を $\pi_L(u) = p$ によって定義する．(b)　$a = (a^i{}_j) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ のフレーム $u = \{X_1, \ldots, X_m\}$ への作用は，$(u, a) \mapsto ua$ で与えられる．ここで，ua は p における新しいフレームで

$$Y_\beta = X_\alpha a^\alpha{}_\beta \tag{9.69}$$

によって定義されるものである．逆に，任意のフレーム $\{X_\alpha\}$ と $\{Y_\beta\}$ が与えられたとき，$\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ の元が存在して，(9.69) を満たすようにできる．したがって，$\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ は LM に推移的に作用する．(c)　U_i と U_j を座標がそれぞれ x^μ と y^μ の共通部分をもつチャートとする．$p \in U_i \cap U_j$ ならば

$$X_\alpha = X^\mu{}_\alpha \partial/\partial x^\mu|_p = \tilde{X}^\mu{}_\alpha \partial/\partial y^\mu|_p \tag{9.70}$$

を得る．ここで，$(X^\mu{}_\alpha)$, $(\tilde{X}^\mu_\alpha) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ である．$X^\mu{}_\alpha = (\partial x^\mu/\partial y^\nu)_p \tilde{X}^\mu{}_\alpha$ なので，変換関数 $t^L_{ij}(p)$ は

$$t^L_{ij}(p) = ((\partial x^\mu/\partial y^\nu)_p) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \tag{9.71}$$

であることがわかる．したがって，TM が与えられると，同じ変換関数によりフレーム束 LM が構成できたことになる．

一般相対論において，右作用は局所 Lorentz 変換に対応するが，左作用は一般の座標変換に対応する．つまり，フレーム束はこれらの変換を統一する最も自然な枠組みであることがわかるのである．もしも計量を導入することにより $\{X_\alpha\}$ が規格化されれば，行列 $(X^\mu{}_\alpha)$ は多脚場となり，構造群は $\mathrm{O}(m)$ に簡約化される; §7.8 を参照．

例 9.12 M 上のスピノル場とは，これから定義する**スピン束**の切断のことである．$\mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ はスピン表現を持たないので，構造群が $\mathrm{SO}(k)$ の正規直交フレーム束を導入する必要がある．例 4.12 でも述べたように，$\mathrm{SPIN}(k)$ は $\mathrm{SO}(k)$ の普遍被覆群である．[スピン束を定義するために，M 上の $\mathrm{SO}(k)$ 束が $\mathrm{SPIN}(k)$ 束にリフトするかどうかをチェックしなくてはならない．このリフトに関する障害については，§11.6 で議論する．]

話を具体的にするために，M を 4 次元 Lorentz 多様体として，その上の 4 次元 Lorentz フレーム束 LM に同伴したスピン束を考えよう．我々は，時空の向き，および時間の方向が決められたフレームに興味がある．このとき，構造群は

$$\mathrm{O}^+_\uparrow(3,1) \equiv \{\Lambda \in \mathrm{O}(3,1) | \det\Lambda = +1, {\Lambda_0}^0 > 0\} \tag{9.72}$$

に帰着する．$\mathrm{O}^+_\uparrow(3,1)$ の普遍被覆群は，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ である．例 5.15(c) を参照．準同型 $\varphi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{O}^+_\uparrow(3,1)$ は，$2:1$ 写像で，その核は $\mathrm{Ker}\varphi = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ である．Weyl スピノルとは，ファイバー束 $(W,\pi,M,\mathbb{C}^2,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}))$ の切断のことである．また，Dirac スピノルとは

$$(D,\pi,M,\mathbb{C}^4,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \oplus \overline{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})})$$

の切断のことである．W の切断は，$\mathrm{O}^+_\uparrow(3,1)$ の $(1/2,0)$ 表現であり，$(\bar{W},\pi,M,\mathbb{C}^2,\overline{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})})$ の切断は，$(0,1/2)$ 表現である．例えば，Ramond (1981) を参照．

スピン束の一般的構造については，§11.6 で詳しく調べることにしよう．

9.4.3 束の自明性

ファイバー束は，それが底空間とファイバーの直積で表されるならば，自明である．つぎの定理は，ファイバー束が自明となるための条件を与えるものである．

定理 9.2 主束が自明となるための必要十分条件は，それが大域的切断をもつことである．

証明： (P,π,M,G) を M 上の主束とし，$s \in \Gamma(M,P)$ を大域的切断とする．この切断は，P と $M\times G$ の間の同相写像の存在を示すために用いられる．a が G の元であれば，積 $s(p)a$ は点 p におけるファイバーに属する．右作用は推移的かつ自由なので，任意の元 $u\in P$ はある $p\in M$ と $a \in G$ に対して，一意的に $s(p)a$ と書かれる．そこで，写像 $\Phi : P \to M\times G$ を

$$\Phi : s(p)a \mapsto (p,a) \tag{9.73}$$

によって定義する．Φ は同相写像であることが簡単に確かめられるので，P は自明束 $M\times G$ であることを示したことになる．

逆に，$P \cong M\times G$ と仮定する．$\phi : M\times G \to P$ を一つの自明化とする．一つの固定した元 $g\in G$ をとる．このとき，$s_{g(p)} = \phi(p.g)$ によって定義される写像 $s_g : M \to P$ は大域的切断である．■

ベクトル束には対応する定理があるのだろうか？ 任意のベクトル束は，大域的な零切断をもつことはすでにわかっている．したがって，定理 9.2 で主束 P を単にベクトル束 E

に置き換えることはできない．E の同伴主束 $P(E)$ を考えよう．定義により，E と $P(E)$ は同じ変換関数の集まりを共有する．束の捻れは純粋に変換関数によって記述されるので，つぎの系が得られる．

系 9.2 ベクトル束 E が自明であるための必要十分条件は，その同伴主束 $P(E)$ が大域的切断をもつことである．

演習問題 9

1. L を S^1 上の実直線束とする（すなわち，L は円柱 $S^1 \times \mathbb{R}$ か開 Möbius の帯のどちらか）．このとき，Whitney 和 $L \oplus L$ は自明束であることを示せ．また，その結論を理解しやすいように $L \oplus L$ についてスケッチせよ．

2. Ω_n を S^n の体積要素で，$\int_{S^n} \Omega_n = 1$ と正規化したものとする．$f : S^{2n-1} \to S^n$ を滑らかな写像とし，引き戻し $f^*\Omega_n$ を考える．このとき

(*a*) $f^*\Omega_n$ は閉形式であり，ω_{n-1} を S^{2n-1} 上の $(n-1)$-形式とするとき，$\mathrm{d}\omega_{n-1}$ と書けることを示せ．

(*b*) **Hopf 不変量**

$$H(f) \equiv \int_{S^{2n-1}} \omega_{n-1} \wedge \mathrm{d}\omega_{n-1}$$

は，ω_{n-1} の選び方にはよらないことを示せ．

(*c*) f が g にホモトピックならば，$H(f) = H(g)$ であることを示せ．

(*d*) n が奇数ならば，$H(f) = 0$ であることを示せ．[ヒント：$\omega_{n-1} \wedge \mathrm{d}\omega_{n-1} = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\omega_{n-1} \wedge \omega_{n-1})$ を使え．]

(*e*) 例 9.9 で定義された写像 $\pi : S^3 \to S^2$ の Hopf 不変量を計算せよ．

Hopf 不変量についての補足

'Hopf 不変量' は，極めて自然な概念であり，様々な場面で根元的存在として現れる．Heinz Hopf が Hopf 写像と $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ となる事実を発見したと同時期 (1931 年頃？)，物理学においても P. A. M. Dirac が独立に磁気モノポールとして同じ写像を発見していた．こうした（偶然と必然の狭間にある）歴史的事実は，その重要性や自然性を端的に物語っているといってもよい．また，後で述べるように多くの幾何学を背景とする基本的問題と密接に関わっている．

ところで，Hopf 不変量は上の演習問題において，微分形式を用いて定義されているが，定義のヴァージョンも多彩である．

▷ 滑らかな写像の二つの異なる正則値の引き戻し（すなわち，互いに交わらない二つの正則ファイバー）の絡み数 (linking number) という整数（詳しくは，Bott-Tu,

Differential forms in Algebraic Topology, Grad. Texts in Math. vol. 82, Springer-Verlag を参照）.

▷ 連続写像 $f : S^{2n-1} \to S^n$ に対して，$X := D^{2n} \cup_f S^n$ とおいて，$H^n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}(u), H^{2n}(X;\mathbb{Z}) \cong Z(v)$ （u, v はそれぞれコホモロジー群の生成元）より，$u^2 = H(f)v$（左辺はカップ積）によって定まる整数 $H(f) \in \mathbb{Z}$.

▷ ある方法で定義される準同型写像 $\pi_{2n-1}(S^n) \to \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}$ の像としての値.

▷ K 理論によるもの（詳しくは，Husemoller, Fibre bundles, Grad. Texts in Math. vol. 20, Springer-Verlag の Chapter 15 を参照）.

などが代表的なものである．Hopf 不変量に関する最も基本的問題は

“**問題**　Hopf 不変量 1 の元（写像）が存在するような n の値を決定せよ”

であった．そもそも Hopf 不変量は写像のホモトピー不変量なので,（写像の和をうまく定義して）準同型写像 $H : \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbb{Z}$ を得るが，ひとたび値 1 を取るものが存在すれば，すべての整数値を取り得ることが簡単にわかる．したがって，上の**問題**は “H がいつ全射になるか？” を問うているのである．例えば，問題 9.2 の (d) より n が奇数ならば，H は零写像なのである．これはホモトピー群 $\pi_{2n-1}(S^n)$ の構造とも密接に関わる．一般に n が偶数ならば無限群（$\mathbb{Z}$ を含む）であることが知られている．例えば，物理学に関係するであろう部分のみを述べると

$$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_7(S^4) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}, \quad \pi_{15}(S^7) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{120}$$

などが知られている．

ところでこの**問題**は論文

J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20–104

の中で，イギリスの数学者 Adams により完全に解決され，その解は “$n = 2, 4, 8$ に限る” というものであった[2]．実際，本章の議論の中にもあったように，$n = 2, 4, 8$ の場合にそれぞれ複素数，4 元数，Cayley 数を用いて典型的な Hopf 不変量 1 の写像が定義される．このことから，ただちに

「零因子をもたない多元体[3]は，複素数，4 元数，Cayley 数に限る」

ことが証明される．これは代数学の問題だが，幾何学によって解決されるのである．

また，第 I 分冊の 7 章（p. 213）で述べられている事実

[2] 原論文の証明は，通常コホモロジーに対して定義される二次作用素の構造を調べる込み入った議論に基づく．その後，K 理論における Adams 作用素の性質から簡単な整数問題に帰着される短い別証明（上記 Husemoller の本の chapter 15 に解説がある）が Adams-Atiyah によって与えられた．このように理論の基礎をなすコホモロジー群の構造を精密にすると，コホモロジー環を定める積構造がより精密になるため，理論の精度が上がり，難しい問題が解きやすくなることが多い．これらを総称して,「一般コホモロジー理論」という．1987 年頃，素粒子論に基づく Edward Witten の仕事を契機にして，K 理論よりさらに精密な ‘楕円コホモロジー (Elliptic cohomology) 論’ が発見された．これについては，第 11 章の補足で少し触れる．

[3] （必ずしも結合法則が成り立つとは限らない）積演算 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (x, y) \mapsto x \cdot y$ があって，$x \cdot y = 0$ ならば必ず $x = 0$ または $y = 0$ が成り立つ．もちろん，$n = 1$ の実数体は自明な多元体である．

「球面 S^n が平行化可能になるのは，$n = 1, 3, 7$ に限る」

こともこれよりわかる．さらには，第I分冊の8章で論じられた話題と関連して

「球面 S^n が概複素構造をもつのは，$n = 2, 6$ に限る」

こともわかるのである[4]．

最後に，"Hopf 不変量1の（非）存在問題" から得られるもう一つ別の（訳者好みの）興味深い話題を紹介して，補足を閉じよう．Brown-Liulevicius の定理として知られているつぎの事実がある:

「もし n 次元閉多様体 M^n が $\mathbb{R}^{n+1}$ にはめ込み可能ならば，M^n は零同境か，さもなければ実射影空間 $\mathbb{R}P^0, \mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^6$ にコボルダント である.」

2つの（必ずしも連結とは限らない）n 次元多様体 M_1, M_2 が，ある $n+1$ 次元多様体 W^{n+1} の境界となっている，すなわち $\partial W^{n+1} = M_1 \cup M_2$ であるとき，M_1 と M_2 は**コボルダント** (cobordant) であるよばれる．コボルダントという関係は，多様体全体の集合における同値関係を定めることが容易にわかる．また，この同値関係による商集合は，非交和 (disjoint union) を演算として群になることがわかる．特に，M^n が球面 S^n と同境であるとき，零同境であるという．これが群の単位元になる．上記の主張の下線部分が Hopf 不変量1の（非）存在と深く関わる．

M^n を n 次元閉多様体として，自己横断的なはめ込み写像 $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ を考える．自己横断的はめ込み写像 φ とは，埋め込みであるか，たとえ自己交叉をもつとしても自己交叉点 $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ の φ による引き戻しの各点における接空間の φ による像が互いを部分空間として含まないときをいう．$x \in M^n$, $y = \varphi(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して，$\varphi^{-1}(\varphi(x)) \neq \{x\}$ のとき，

$$\sharp\{\varphi^{-1}(y)\} = k \qquad (k = 2, \ldots, n+1)$$

とおいて，このような点 $y = \varphi(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ を φ の k 重点という．特に φ が自己横断的はめ込み写像なので，$(n+1)$ 重点の集合は離散点集合であり，M^n がコンパクトなので有限集合である．上で述べた Brown-Liulevicious の定理と密接に関連するが，P. Eccles は，自己横断的なはめ込み写像 $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ の $(n+1)$ 重点集合の個数が奇数（すなわち，$(n+1)$ 重点が必ず現れる）となり得るのは，$n = 0, 2, 6$ の場合に限ることを証明した．しかもその証明において，この次元の制限が Hopf 不変量1の元の存在問題の解から来ることを明らかにした．例えば $n = 2$ の場合，実射影平面のはめ込み $\varphi : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$ で，3重点を唯一もつ「ボーイ曲面 (Boy's surface)」がよく知られている．(7重点を唯一つもつはめ込み $\varphi : \mathbb{R}P^6 \to \mathbb{R}^7$ はまだ見つかっていないようである.)

Hopf 不変量の守備範囲は実に広い．

---

[4] $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ として，双一次写像 $\mu : K^n \times K^n \to K^n$ が K^n の内積に関して，(i) $\mu(x, y)$ は x と y に直交，(ii) $\mu(x, y)^2 = x^2 y^2 - \langle x, y\rangle^2$，の二つの条件を満たすとき，写像 μ をベクトル積という．Adams の定理から，$\mathbb{R}^n$ 上にベクトル積があれば，$n = 3, 7$ に限ることがわかる．そして S^n 上に概複素構造 J があると，J を用いて $\mathbb{R}^{n+1}$ 上にベクトル積を構成することができる．

第 9 章への補足

一般に任意に与えられたファイバー束を分類するのは極めて難しい問題である．しかし，底空間とファイバーを球面に限定するとやさしくなる．

$E \xrightarrow{\pi} S^n$ を底空間が n 次元球面 S^n，ファイバーが $(m-1)$ 次元球面 S^{m-1} で，構造群が回転群 $\mathrm{SO}(m)$ のファイバー束としよう．すなわち，E は S^n 上の m 次元ベクトル束の同伴束であるという特別な場合である．構造群は，単位球面であるファイバー $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ に左から作用している．このようなファイバー束の分類は，つぎのように簡明に記述される．

まず，底空間を北半球 D^n_N と南半球 D^n_S によって，$S^n = D^n_N \cup D^n_S$ と表し，赤道を $S^{n-1} = D^n_N \cap D^n_S$ とする．D^n_N, D^n_S は共に可縮だから，系 9.1 より $E|_{D^n_N}$ と $E|_{D^n_S}$ は自明で，それぞれ一つの自明化

$$\psi_N : \pi^{-1}(D^n_N) \to D^n_N \times S^{m-1}, \quad \psi_S : \pi^{-1}(D^n_N) \to D^n_S \times S^{m-1}$$

が存在する．このとき，任意の $x \in S^{n-1}$, $y \in S^{m-1}$ に対して，連続写像

$$g : S^{n-1} \to \mathrm{SO}(m)$$

を

$$\psi_N^{-1}(x, y) = \psi_S^{-1}(x, g(x)y)$$

によって定義する．すると，対応 $(x, y) \mapsto (x, g(x)y)$ を一つ決める（すなわち，連続写像 $g : S^{n-1} \to \mathrm{SO}(m)$ を一つ指定する）と，上の様なファイバー束が一つ構成される．逆に，任意の球面上の球面束 E は必ずこうして構成されることが容易にわかる．さらに重要なのは，

> “こうしてできるファイバー束が同値であるための必要十分条件は，連続写像 g のホモトピー類が一致することである．”

（特に，自明束には単位元が対応する．難しい証明ではないが，詳細は Steenrod (1951) の §26 を参照．）よって，上記のファイバー束は，ホモトピー群 $\pi_{n-1}(\mathrm{SO}(m))$ により分類されるのである[5].

この結果を利用して，第 5 章の補足（第 I 分冊）で述べた “7 次元エキゾチック球面” の一つであるファイバー束について手短に紹介しよう．このような 7 次元多様体は，すでに述べたように S^4 上の S^3 束として与えられる．そこで，S^4 上の S^3 束の分類には，上で述べたようにホモトピー群 $\pi_3(\mathrm{SO}(4))$ の計算が必要である．これはさほど難しくない．

4 次の回転群 $\mathrm{SO}(4)$ は，それ自身自然な射影

$$\mathrm{SO}(4) \to \mathrm{SO}(4)/\mathrm{SO}(3) \cong S^3$$

[5] つまり，この場合ファイバー束の同値による分類という幾何学的問題がホモトピー群という代数構造の計算に帰着されるのである．実は，一般のファイバー束の分類問題も原理的には ‘ある種の空間’ のホモトピー集合の計算の問題に帰着される．しかし，一般の場合は ‘ある種の空間’ が無限次元の対象物となり，この計算は数学的に途轍もなく難しい．

により，S^3 上の SO(3) 束の全空間になるが，これは自明束なので（例えば，Steenrod (1951), §8.6 を参照），SO(4) は $S^3 \times \mathrm{SO}(3)$ に同相である．一方，同相 $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{R}P^3$ が存在する（例えば，Steenrod (1951), §22.3 を参照）．よって，第 I 分冊の第 4 章の (4.39) の同型より

$$\pi_3(\mathrm{SO}(4)) \cong \pi_3(S^3 \times \mathbb{R}P^3) \cong \pi_3(S^3) \oplus \pi_3(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{9.A}$$

を得ることができた[6]．(9.A) により分類を与える群は計算できたが，ファイバー束を一つ特定するには，ホモトピー群の 2 つの生成元を知る必要がある．詳細は省略して結果のみ述べておこう．

このためには，4 元数の構造を使うとわかりやすい．$\mathbb{H}$ を 4 元数（ハミルトン数）体とし，$S^3 = \{h \in \mathbb{H}; |h| = 1\}$ とおいて

$$\rho : S^3 \to \mathrm{SO}(4), \qquad \sigma : S^3 \to \mathrm{SO}(4)$$

を，任意の $h' \in \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ に対して

$$\rho(h) \cdot h' = hh'h^{-1}, \qquad \sigma(h) \cdot h' = hh'$$

によって定義する．左辺は構造群のファイバー（単位ベクトル）への左作用であり，右辺は 4 元数の積を表す．

この二つの $[\rho], [\sigma] \in \pi_3(\mathrm{SO}(4))$ が生成元をなすことが知られている（Steenrod (1951), §22.7 を参照）．したがって，$\pi_3(\mathrm{SO}(4)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の任意の元は，整数 m, n によって，$(m[\rho], n[\sigma])$ と書ける．つまり，整数の組 $(m, n) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を指定することにより，S^4 上の S^3 束の全空間である 7 次元多様体 E が一つ定まることになる．そこで，これを $E^7_{m,n}$ と書くことにしよう．底空間とファイバーが単連結であるから，いつでも $\pi_1(E^7_{m,n}) = 1$ である．ところで，Steenrod, §26.6 にあるように，ファイバー束として (m, n) と $(m+n, -n)$ は同値になるので，$E_{m,n} \cong E_{m+n,-n}$（微分同相）が成り立つ．

また簡単にわかることとして，例えば，$E^7_{0,0} \cong S^4 \times S^3$（微分同相）である．また，(9.63) の前後で記述されている 4 元数を用いて定義される Hopf 写像 $S^7 \to S^4$ が，実は $E^7_{0,1}$ に対応することがわかるので，$E^7_{0,\pm 1} \cong S^7$（微分同相）が得られることになる[7]．

一般の整数 m に対して，$E^7_{m,\pm 1}$ は S^7 に同相（微分同相とは限らない）である．これは J. Milnor (1956) の原論文にも具体的に記述されている通り，C^∞ 級関数 $f : E^7_{m,\pm 1} \to \mathbb{R}$ で，臨界点が唯二つ（最小値と最大値）のものが存在するので，モース理論[8]の基本的命題

> “n 次元閉多様体 M^n 上に臨界点が二つのみの C^∞ 級関数が存在するならば，
> M^n は n 次元球面に同相である”

から，$E^7_{m,\pm 1}$ が S^7 に同相であることがしたがう．与えられた m に対して，$E^7_{m,\pm 1}$ が S^7 に微分同相にならないための条件は

$$\frac{m(m+1)}{2} \neq 0 \pmod{28} \tag{9.B}$$

[6] ここで，$\pi_3(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}$ は，二重被覆空間 $S^3 \to \mathbb{R}P^3$ の対応からわかる．

[7] Gysin 完全系列というものを使って計算すると，$n \neq \pm 1$ のとき，$E^7_{m,n}$ は（$H^3(E_{m,n}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{|n|}$ なので）S^7 に同相でないこともわかる．

[8] 本書にはモース理論に関しての言及は無いので，興味のある読者は
モース理論，ジョン・ミルナー著（吉岡書店）
微分位相幾何学（第 5 章），田村一郎著（岩波書店）
を参照されたい．

であり，(9.B) の左辺の値は微分同相不変量であることが知られている．したがって，m の値を変えると，少なくとも 27 個の S^7 に同相だが微分同相ではない “7 次元エキゾチック球面” の族が得られることになる[9]．

こうしたファイバー束による構成は，かなり技巧的に見えるが特異点理論によると，実は驚くほど自然に存在する多様体であることがわかる．実際，

$$\Sigma^7(k) = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5; |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1,$$
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0\}$$

という集合は，(直ちに 7 次元多様体であることがわかるが) $k = 1, \ldots, 27$ とすると異なる 27 個のエキゾチック球面を与えることが特異点理論 $+\alpha$ により証明される．(例えば，$\Sigma^7(1)$ と $E^7_{1,1}$ はおそらく微分同相である．)

エキゾチック球面の最初の発見者である J. Milnor は，この事実に驚いて

> Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Study vol. 61, Princeton Univ. Press, 1968.

という本を書いたほどである．

上の自然な例 $\Sigma^7(k)$ は，S^7 上の S^5 で分岐する二重分岐被覆になっている．これはあくまで訳者の私的見解であるが，エキゾチック多様体の構成はファイバー束構造によるより，分岐被覆による構成に注目する方がより生産的ではないかと感じている．

---

[9] この計算には，指数定理（12 章）と特性類（11 章）の知識が必要となる．これらについての詳しい議論に興味のある読者は

> 微分位相幾何学（第 12 章），田村一郎著（岩波書店）

を参照されたい．

第10章　ファイバー束上の接続

7章で，Riemann 多様体における接続を導入し，異なる接空間のベクトルを比べることが可能となることを学んだ．本章では，ファイバー束上の接続を幾何的ではあるが，やや抽象的な方法で定義する．

最初に，主束上の接続を定義するそこで与えられる抽象的な定義は，物理学者にはその局所表示がゲージ・ポテンシャルとして知られている「接続 1-形式」を導入することによって具体的に実現される．Yang-Mills 場の強さは，接続により与えられる曲率として定義される主束上の接続は自然に，それに同伴するベクトル束の共変微分を定める7章で得られた諸結果がここでのアプローチを接束に適用することにより再現される本章の最後で接続の理論の物理学へのいくつかの応用に触れる：ゲージ場理論と Berry の位相への応用である．

本章は Choquet-Bruhat & DeWitt-Morette (1982)，小林 (1984)，野水 (1981) の文脈にしたがう．詳細に関しては，名著 Kobayashi and Nomizu (1963, 1968) を見るとよい．ほかに手短な概説として Daniel and Viallet (1980) を参照せよ．

10.1　主束上の接続

主束上の接続の定義には，同値なものがいくつかある．ここでのアプローチは，接空間 T_uP を “垂直方向” と “水平方向” の部分空間へ分解することにもとづいている．これは抽象的にみえるが，ほかのアプローチと比べて幾何学的描写が見やすいことと，特別な局所自明化によらずに定義されるという利点がある．接続はある公理を満たす $\mathfrak{g}$ 値 1-形式としても定義される．そしてこれらの定義は同値であることが示される．

Lie 群と Lie 環に関する基本的事項を広く用いるので，簡単に概説しておこう（詳細は§5.6 を参照）．G を Lie 群とする．左作用 L_g と右作用 R_g が $g, h \in G$ に対して $L_g h = gh$, $R_g = hg$ によって定義される．L_g は写像 $L_{g*} : T_h(G) \to T_{gh}(G)$ を誘導する．左不変ベクトル場 X は, $L_{g*}X|_h = X|_{gh}$ を満たす．左不変ベクトル場全体は G の Lie 環を形成し，これを $\mathfrak{g}$ とかく．$X \in \mathfrak{g}$ は単位元 e における値によって指定される，またその逆も言えるので，ベクトル空間の同型 $\mathfrak{g} \cong T_eG$ が成り立つ．Lie 環 $\mathfrak{g}$ は，Lie 括弧積 $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} T_\gamma$ のもとで閉じている．ここで $\{T_\alpha\}$ は $\mathfrak{g}$ の生成元の集合である．$f_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ は構造定数とよばれる．随伴作用 $\mathrm{ad} : G \to G$ は $\mathrm{ad}_g h \equiv ghg^{-1}$ で定義される．ad_g の微分は，随伴写像とよばれ，$\mathrm{Ad}_g : T_h(G) \to T_{ghg^{-1}}(G)$ で表される．$T_e(G) \simeq \mathfrak{g}$ に制限すると，Ad_g はそれ自身の上への写像 $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ で，$A \mapsto gAg^{-1}, A \in \mathfrak{g}$ で与えられる．

10.1.1 諸定義

u を主束 $P(M,G)$ の元とし，G_p を $p=\pi(u)$ におけるファイバーとする．u において，G_p に接する T_uP の部分空間を**垂直部分空間** V_uP とよぶ．[注：T_uP は P の接空間であり，M の接空間 T_pM と混同してはならない．] V_uP がどのように構成されるかを調べよう．$\mathfrak{g}$ の元 A をとる．右作用

$$R_{\exp(tA)}u = u\exp(tA)$$

によって，u を通る曲線が P に定義される．$\pi(u)=\pi(u\exp(tA))=p$ であるから，この曲線は G_p の内部にある．ベクトル $A^{\#}\in T_uP$ を

$$A^{\#}f(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(u\exp(tA))|_{t=0} \tag{10.1}$$

によって定義する．ここで $f: P\to\mathbb{R}$ は任意の滑らかな関数である．ベクトル $A^{\#}$ は u において G_p に接するので，$A^{\#}\in V_uP$ となる．このようにして，P の各点においてベクトル $A^{\#}$ が定義され，それからベクトル場 $A^{\#}$ を構成される．これを A によって生成される**基本ベクトル場**とよぶ．したがって，$A\mapsto A^{\#}$ で与えられるベクトル空間の同型写像 $\sharp:\mathfrak{g}\to V_uP$ が存在する．**水平部分空間** H_uP は T_uP における V_uP の補空間で，P に接続が定義されれば一意的に決まる．

問 10.1 (*a*) $X\in V_uP$ に対して $\pi_*X=0$ が成り立つことを示せ．

(*b*) $\sharp$ は Lie 環の構造を保つことを示せ．すなわち

$$[A^{\#},B^{\#}] = [A,B]^{\#} \tag{10.2}$$

定義 10.1 $P(M,G)$ を主束とする．P 上の**接続**とは，接空間 T_uP を垂直部分空間 V_uP と水平部分空間 H_uP へ一意的に分解する操作で，以下の条件を満たすものである：

(i) $T_uP = H_uP\oplus V_uP$

(ii) P 上の滑らかなベクトル場 X は滑らかなベクトル場 $X^H\in H_uP$ と $X^V\in V_uP$ に $X = X^H + X^V$ と分解される．

(iii) 任意の $u\in P$, $g\in G$ に対して $H_{ug}P = R_{g*}H_uP$ となる; 図 10.1 を参照.

条件 (iii) は，<u>同じ</u> ファイバー上では，水平部分空間 H_uP と $H_{ug}P$ は，右作用によって誘導される線形写像 R_{g*} によって関係づけられることを述べている．したがって，u における部分空間 H_uP は <u>同じ</u> ファイバー上のすべての水平部分空間を生成する．この条件は，点 u が平行移動されると，その定数倍 $ug, g\in G$ も平行移動されることを保証する.。

現時点では，読者は接続のこの定義がむしろ居心地が悪いと感じているかもしれない．初めて見ると，この定義はゲージ・ポテンシャルや場の強さとは関係がないように思えるだろう．この点に関しては，P 上の接続 1-形式を導入したあとで明確にするつもりである．再度強調しておきたいのは，分解 $T_uP = V_uP\oplus H_uP$ に基づく定義は，純粋に幾何学的で

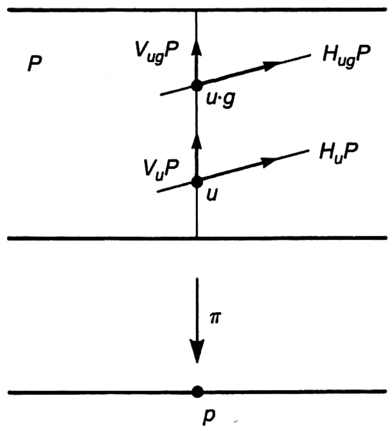


図 **10.1.** 水平部分空間 $H_{ug}P$ は右作用によって H_uP から得られる.

あり，その他の余分な情報からは独立であるということである．接続は，以下で徐々に扱いやすくなっていくが，その反面幾何学的なイメージやその固有な特性は，一般に隠されてしまう．

10.1.2 接続 1-形式

実際の計算では，T_uP を V_uP と H_uP に系統的に分解することが必要となる．これは，**接続 1-形式**とよばれる Lie 環に値をもつ 1-形式 $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ を導入することによって実現される．

定義 10.2 接続 1-形式 $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$ は，T_uP の垂直成分 $V_uP \simeq \mathfrak{g}$ の上への射影である．射影の性質は次の条件によりまとめられる．

(i) $\omega(A^{\#}) = A \qquad A \in \mathfrak{g}$ (10.3a)

(ii) $R_g^*\omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\omega$ (10.3b)

すなわち，$X \in T_uP$ に対して

$$R_g^*\omega_{ug}(X) = \omega_{ug}(R_{g*}X) = g^{-1}\omega_u(X)g \qquad (10.3b')$$

が成り立つ．

水平部分空間 H_uP を ω の核

$$H_uP \equiv \{X \in T_uP | \omega(X) = 0\} \qquad (10.4)$$

によって定義する．この定義が，定義 10.1 と一致することを示すためにつぎの命題を証明する．

命題 10.1 水平部分空間 (10.4) は

$$R_{g*}H_uP = H_{ug}P \tag{10.5}$$

を満たす.

証明:点 $u \in P$ をとり,(10.4) によって H_uP を定義する.$X \in H_uP$ をとり,$R_{g*}X \in T_{ug}P$ を構成する.$\omega(X) = 0$ なので

$$\omega(R_{g^*}X) = R_g^*\omega(X) = g^{-1}\omega(X)g = 0$$

である.したがって,$R_{g*}X \in H_{ug}P$ である R_{g*} は逆をもつ線形写像であることに注意する.ゆえに,任意のベクトル $Y \in H_{ug}P$ はある $X \in H_uP$ に対して $Y = R_{g*}X$ と表される.よって (10.5) が証明された. ∎

ω は定義 10.1 の公理と調和して T_uP を $H_uP \oplus V_uP$ に分解するので,接続 1-形式 ω の定義は接続そのものの定義と同値である.ここで定義された接続 1-形式 ω は,いわゆる **Ehresmann 接続**とよばれるものである.

10.1.3 局所接続形式とゲージ・ポテンシャル

$\{U_i\}$ を M の開被覆とし,σ_i を各 U_i で定義される局所切断とする.U_i 上の Lie 環に値をもつ 1-形式 $\mathcal{A}_i$ を

$$\mathcal{A}_i \equiv \sigma_i^*\omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i) \tag{10.6}$$

で導入しておくと都合がよい.逆に,Lie 環に値をもつ 1-形式 $\mathcal{A}_i$ が与えられると,σ_i^* による引き戻しが $\mathcal{A}_i$ となる接続 1-形式 ω を再構成することができる.

定理 10.1 U_i 上に $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\mathcal{A}_i$ と局所切断 $\sigma_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$ が与えられると,U_i 上で $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega$ となる接続 1-形式 ω が存在する.

証明:P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 ω_i を

$$\omega_i \equiv g_i^{-1}\pi^*\mathcal{A}_i g_i + g_i^{-1}\mathrm{d}_P g_i \tag{10.7}$$

によって定義しよう.ここで d_P は P 上の外微分で,g_i は $u = \sigma_i(p)g_i$ に対して $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ で定義される**標準的自明化**である.まず $\sigma_i^*\omega_i = \mathcal{A}_i$ を示そう.$X \in T_pM$ に対して

$$\begin{aligned}\sigma_i^*\omega_i(X) &= \omega_i(\sigma_{i*}X) = \pi^*\mathcal{A}_i(\sigma_{i*}X) + \mathrm{d}_P g_i(\sigma_{i*}X)\\ &= \mathcal{A}_i(\pi_*\sigma_{i*}X) + \mathrm{d}_P g_i(\sigma_{i*}X)\end{aligned}$$

を得る.ここで $\sigma_{i*}X \in T_{\sigma_i}P$,および σ_i において $g_i = e$ であることを用いた.図 10.2 を参照せよ.さらに,$\sigma_{i*}X$ に沿って $g \equiv e$ なので $\pi_*\sigma_{i*} = \mathrm{id}_{T_p(M)}$ かつ $\mathrm{d}_P g_i(\sigma_{i*}X) = 0$ であることに注意する.したがって,$\sigma_i^*\omega_i(X) = \mathcal{A}_i(X)$ が得られた.

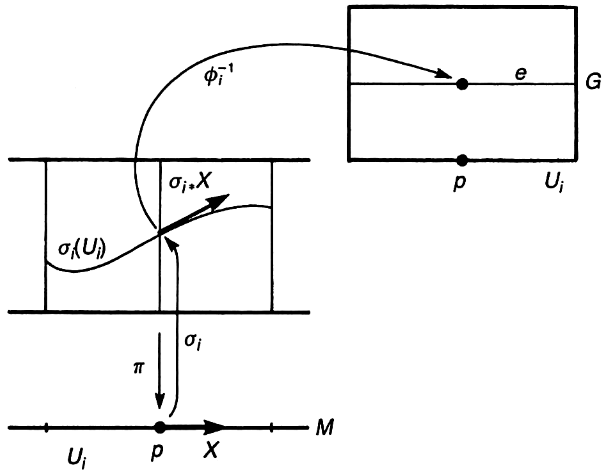


図 **10.2.** 局所切断 σ_i によって定義される U_i 上の標準的局所自明化

つぎに，ω_i が定義 10.2 における接続 1-形式の公理を満たすことを示そう．

(i)　$X = A^{\#} \in V_uP, A \in \mathfrak{g}$ とする．問 10.1 (a) から $\pi_* X = 0$ が導かれる．したがって

$$\begin{aligned}\omega_i(A^{\#}) &= g_i^{-1}\mathrm{d}_P g_i(A^{\#}) = g_i(u)^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}g(u\exp(tA))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\\ &= g_i(u)^{-1}g_i(u)\left.\frac{\mathrm{d}\exp(tA)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = A\end{aligned}$$

を得る．

(ii)　$X \in T_uP,\ h \in G$ をとる．このとき，

$$R_h^*\omega_i(X) = \omega_i(R_{h*}X) = g_{iuh}^{-1}\mathcal{A}_i(\pi_* R_{h*}X)g_{iuh} + g_{iuh}^{-1}\mathrm{d}_P g_{iuh}(R_{h*}X)$$

を得る．$g_{iuh} = g_{iu}h$ また $\pi_* R_{h*}X = \pi_* X$ なので（$\pi R_h = \pi$ に注意），

$$\begin{aligned}R_h^*\omega_i(X) &= h^{-1}g_{iu}^{-1}\mathcal{A}_i(\pi_* X)g_{iu}h + h^{-1}g_{iu}^{-1}\mathrm{d}_P g_{iu}(X)h\\ &= h^{-1}\omega_i(X)h\end{aligned}$$

を得る．ここに

$$\begin{aligned}g_{iuh}^{-1}\mathrm{d}_P g_{iuh}(R_{h*}X) &= g_{iuh}^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{i\gamma(t)h}\right|_{t=0}\\ &= h^{-1}g_{iu}^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{i\gamma(t)}\right|_{t=0}h = h^{-1}g_{iu}^{-1}\mathrm{d}_P g_{iu}(X)h\end{aligned}$$

を用いた．ここに，$\gamma(t)$ は $u = \gamma(0)$ を通る曲線で u における接ベクトルが X となるものである．

よって (10.7) で定義される $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 ω_i は実際に $\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega_i$ を満たし，接続 1-形式の公理を満たす．∎

ω が P 上で一意的に定義されるためには，すなわち分解 $T_uP = H_uP \oplus V_uP$ が一意的であるには，$U_i \cap U_j$ 上で $\omega_i = \omega_j$ とならなければならない．このとき，一意的な 1-形式 ω が $\omega|_{U_i} = \omega_i$ によって P 全体で定義される．この条件を満足させるために，局所表示 $\mathcal{A}_i$ は Christoffel の記号の性質に類似の，ある特別な変換規則を満たさなくてはならない．最初に，技術的な補題から証明する．

補題 10.1 $P(M, G)$ を主束，σ_i (σ_j) を U_i (U_j) 上の局所切断とする．ただし $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ とする．このとき $X \in T_pM$ $(p \in U_i \cap U_j)$ に対して，$\sigma_{i*}X$ と $\sigma_{j*}X$ は

$$\sigma_{j*}X = R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + (t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X))^{\#} \tag{10.8}$$

を満たす．ただし，$t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ は変換関数である．

証明：曲線 $\gamma : [0, 1] \to M$ を $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = X$ となるように選ぶ．$\sigma_i(p)$ と $\sigma_j(p)$ は変換関数によって $\sigma_j(p) = \sigma_i(p)t_{ij}(p)$ の関係があるので（(9.43) を参照），

$$\begin{aligned}
\sigma_{j*}X &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_j(\gamma(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\sigma_i(t)t_{ij}(t)\}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma_i(t)\cdot t_{ij}(p) + \sigma_i(p)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t_{ij}(t)\right|_{t=0} \\
&= R_{t_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + \sigma_j(p)t_{ij}(p)^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t_{ij}(t)\right|_{t=0}
\end{aligned}$$

を得る．ここで $\sigma_i(t)$ は $\sigma_i(\gamma(t))$ を表し，G は $R_{g*}X = Xg$ となる行列群であることを仮定した．

$$\begin{aligned}
t_{ij}(p)^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X) &= t_{ij}(p)^{-1}\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t_{ij}(t)\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t_{ij}(p)^{-1}t_{ij}(t)]\right|_{t=0} \in T_e(G) \simeq \mathfrak{g}
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意しよう．[$t = 0$ において $t_{ij}(p)^{-1}t_{ij}(\gamma(t)) = e$ に注意．] これは $\sigma_{j*}X$ の第二項が $\sigma_j(p)$ におけるベクトル場 $(t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X))^{\#}$ を表していることを示している．■

両立条件は (10.8) に接続 1-形式 ω を適用することによって容易に得られる．

$$\begin{aligned}
\sigma_j^*\omega(X) &= R_{t_{ij}}^*\omega(\sigma_{i*}X) + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X) \\
&= t_{ij}^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(X)
\end{aligned}$$

となるが，ここで定義 10.2 の公理を用いている．これは任意の $X \in T_pM$ に対して成立するので，上の方程式は

$$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_it_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij} \tag{10.9}$$

となる．これが求める**両立条件**である．

逆に，開被覆 $\{U_i\}$，局所切断 $\{\sigma_i\}$ と (10.9) を満たす局所表示 $\{\mathcal{A}_i\}$ が与えられると，P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式を構成することができる．自明でない主束は大域的切断をもたないので，

$\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ は局所的には存在するが，大域的に存在するとは限らない．ゲージ理論では，$\mathcal{A}_i$ はゲージ・ポテンシャル（**Yang-Mills** ポテンシャル）と同一視される．モノポールの場合に見たように，モノポール場 $\boldsymbol{B} = g\boldsymbol{r}/r^3$ は単独のゲージ・ポテンシャルでは記述されないので，この S^2 上の U(1) 束を記述するために少なくとも 2 つの局所表示 $\mathcal{A}_i$ が必要である．

問 10.2 $P(M,G)$ を M 上の主束とし，U を M のチャートとする．U 上の局所切断 σ_1 と σ_2 をとる．これらは $\sigma_2(p) = \sigma_1(p)g(p)$ を満たすものとする．このとき，対応する局所表示 $\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ には関係

$$\mathcal{A}_2 = g^{-1}\mathcal{A}_1 g + g^{-1}\mathrm{d}g \tag{10.10a}$$

が成り立つことを示せ．成分表示では，

$$\mathcal{A}_{2\mu} = g^{-1}(p)\mathcal{A}_{1\mu}(p)g(p) + g^{-1}(p)\partial_\mu g(p) \tag{10.10b}$$

となり，これは § 1.2 で定義された**ゲージ変換**に他ならない．

例 10.1 P を M 上の U(1) 束とし，交わりをもつチャート U_i と U_j をとる．$\mathcal{A}_i$ ($\mathcal{A}_j$) を U_i (U_j) 上の局所接続形式とする．変換関数 $t_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{U}(1)$ は

$$t_{ij}(p) = \exp[\mathrm{i}\chi(p)] \quad \chi(p) \in \mathbb{R} \tag{10.11}$$

で与えられる．$\mathcal{A}_i$ と $\mathcal{A}_j$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_j(p) &= t_{ij}(p)^{-1}\mathcal{A}_i(p)t_{ij}(p) + t_{ij}(p)^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(p)\\ &= \mathcal{A}_i(p) + \mathrm{id}\chi(p)\end{aligned} \tag{10.12a}$$

で結ばれている．成分表示では，馴染み深い表示

$$\mathcal{A}_{j\mu} = \mathcal{A}_{i\mu} + \mathrm{i}\partial_\mu \chi \tag{10.12b}$$

を得る．我々の接続 $\mathcal{A}_\mu$ は，標準的なベクトル・ポテンシャル A_μ とは Lie 環因子の分だけ異なる；$\mathcal{A}_\mu = \mathrm{i}A_\mu$.

ここで ω は主束 $P(M,G)$ 上で大域的に定義されていることを再度注意する．$P(M,G)$ 上には多くの接続 1-形式が存在するが，それらは束の構造については同じ大域的情報を共有している．それに対して，個々の局所接続（ゲージ・ポテンシャル）$\mathcal{A}_i$ は自明化 $\pi^{-1}(U_i)$ に伴うので，P 上のどんな大域的情報ももち得ない．主束の大域的情報を引き継ぐのは，ω，すなわち両立条件 (10.9) を満たす $\{\mathcal{A}_i\}$ を 全部集めたもの である．

10.1.4　水平もち上げと平行移動

第 7 章でベクトルの平行移動を ベクトルを変化させない 移動として定義した．M 上の曲線に沿った主束の元の平行移動は，曲線の‘水平もち上げ’によって与えられる．

定義 10.3 $P(M,G)$ を G 束とし，$\gamma:[0,1]\to M$ を M における曲線とする．このとき，ある曲線 $\tilde{\gamma}:[0,1]\to P$ が $\pi\circ\tilde{\gamma}=\gamma$ を満たし，$\tilde{\gamma}(t)$ の接ベクトルが常に $H_{\tilde{\gamma}(t)}P$ に属するならば，$\tilde{\gamma}$ は γ の**水平もち上げ**とよばれる．

$\tilde{X}$ を $\tilde{\gamma}$ の接ベクトルとする．このとき，定義により $\omega(\tilde{X})=0$ が満たされる．この条件は常微分方程式 (ODE) であり，ODE の基本定理から，水平もち上げの局所的な存在と一意性が保証される．

定理 10.2 $\gamma:[0,1]\to M$ を M における曲線とし，$u_0\in\pi^{-1}(\gamma(0))$ とする．このとき P における水平もち上げ $\tilde{\gamma}(t)$ で，$\tilde{\gamma}(0)=u_0$ を満たすものが一意的に存在する．

そのような曲線 $\tilde{\gamma}$ を実際に構成しよう．U_i を γ を含むチャートとし，U_i 上の切断 σ_i をとる．水平もち上げ $\tilde{\gamma}$ が存在すれば，$\tilde{\gamma}(t)=\sigma_i(\gamma(t))g_i(t)$ と表される．ここで $g_i(t)$ は $g_i(\gamma(t))\in G$ を表す．一般性を失うことなく，$\sigma_i(\gamma(0))=\tilde{\gamma}(0)$，すなわち $g_i(0)=e$ を満たす切断がとれるとしてよい．X を $\gamma(0)$ における $\gamma(t)$ の接ベクトルとする．このとき，$\tilde{X}=\tilde{\gamma}_*X$ は $u_0=\tilde{\gamma}(0)$ において $\tilde{\gamma}$ に接する．接ベクトル $\tilde{X}$ は水平方向なので，$\omega(\tilde{X})=0$ を満たす．補題 10.1 を若干修正すると

$$\tilde{X}=g_i(t)^{-1}\sigma_{i*}Xg_i(t)+[g_i(t)^{-1}\mathrm{d}g_i(X)]^{\#}$$

が得られる．上の方程式に ω をかけると

$$0=\omega(\tilde{X})=g_i(t)^{-1}\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t)+g_i(t)^{-1}\frac{\mathrm{d}g_i(t)}{\mathrm{d}t}$$

となる．この式に左から $g_i(t)$ を掛けて

$$\frac{\mathrm{d}g_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\omega(\sigma_{i*}X)g_i(t) \tag{10.13a}$$

を得る．常微分方程式の基本定理は，(10.13a) の解の存在と一意性を保証する．

$\omega(\sigma_{i*}X)=\sigma_i^*\omega(X)=\mathcal{A}_i(X)$ であるので，(10.13a) は局所的に

$$\frac{\mathrm{d}g_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\mathcal{A}_i(X)g_i(t) \tag{10.13b}$$

と表される．$g_i(0)=e$ を満たす形式解は

$$\begin{aligned}g_i(\gamma(t))&=\mathrm{P}\exp\left(-\int_0^t\mathcal{A}_{i\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right)\\&=\mathrm{P}\exp\left(-\int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)}\mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t))\mathrm{d}x^\mu\right)\end{aligned} \tag{10.14}$$

と表される．ここで P は $\gamma(t)$ に沿った順序積の演算子である．[1] すると，水平もち上げは $\tilde{\gamma}(t)=\sigma_i(\gamma(t))g_i(\gamma(t))$ と表される．

[1] 一般に $\mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t))$ は $\mathcal{A}_{i\nu}(\gamma(s))$ と非可換なので，(10.14) の指数関数はこのままでは正しく定義されていない．$A(t),B(t)$ を t に依存する行列とすると，P の作用は

$$\mathrm{P}[A(t)B(s)]=\begin{cases}A(t)B(s) & (t>s)\\ B(s)A(t) & (s>t)\end{cases}$$

および，そのより多くの行列に対する一般化で定義される．

系 10.1 $\tilde{\gamma}'$ をもう一つの γ の水平もち上げで，$\tilde{\gamma}'(0) = \gamma(0)g$ を満たすとする．このとき，すべての $t \in [0,1]$ に対して $\tilde{\gamma}'(t) = \tilde{\gamma}(t)g$ が成り立つ．

証明： 最初に水平部分空間は右不変，$R_{g*}H_uP = H_{ug}P$ であることに注意する．$\tilde{\gamma}$ を γ のもう一つの水平もち上げとする．このとき，$\tilde{\gamma}_g : t \mapsto \tilde{\gamma}(t)g$ もまた $\gamma(t)$ の水平もち上げになる，というのはその接ベクトルが $H_{\tilde{\gamma}g}P$ に属するからである．すると定理 10.2 から，$\tilde{\gamma}'$ が始点を $\tilde{\gamma}(0)g$ とする一意的な水平もち上げであることがわかる．∎

例 10.2 $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ として，束 $P(M,\mathbb{R}) = M \times \mathbb{R}$ を考えよう．$\phi : ((x,y),f) \mapsto u \in P$ を局所自明化とする．ここで (x,y) は M の座標で，f は加法群 $\mathbb{R}$ の座標である．

$$\omega = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} + \mathrm{d}f$$

を接続 1-形式とする．ω が接続 1-形式の公理を満たすことが容易に確かめられる．実際，$A \in \mathbb{R}$ を加法群の Lie 環の元として $A^{\#} = A\partial/\partial f$ に対して，$\omega(A^{\#}) = A$ を得る．さらに，$\mathbb{R}$ は可換なので $R_g^*\omega = \omega = g^{-1}\omega g$ である．$\gamma : [0,1] \to M$ を曲線 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ とする．$((1,0),0)$ を始点とする $\gamma(t)$ の水平もち上げを解いてみよう．

$$X = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial f}$$

を $\tilde{\gamma}(t)$ の接ベクトルとする．X が水平もち上げになるには，

$$0 = \omega(X) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{y}{r^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{x}{r^2} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -2\pi + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

を満たさなくてはならない．その解は容易に求まって，$f = 2\pi t +$ 定数 である．結局，$((1,0),0)$ を通る水平もち上げ $\tilde{\gamma}$ は

$$\tilde{\gamma}(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t) \tag{10.15}$$

であることがわかり，これは単位円上の螺旋である．

群作用（右作用でも左作用でもかまわない）のもとで，f は $f+g$, $g \in \mathbb{R}$ に移る．ずらされた水平もち上げは

$$\tilde{\gamma}_g(t) = ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), 2\pi t + g) \tag{10.16}$$

となる．

$\gamma : [0,1] \to M$ を曲線とし，点 $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ をとる．u_0 を通る $\gamma(t)$ の一意的な水平もち上げ $\tilde{\gamma}(t)$ が存在するので，点 $u_1 = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(\gamma(1))$ が一意的に決まる．図 10.3 を参照せよ．点 u_1 は曲線 $\tilde{\gamma}$ に沿った u_0 の**平行移動**とよばれる．この対応 $u_0 \mapsto u_1$ は，写像 $\Gamma(\tilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \to \pi^{-1}(\gamma(1))$ を定める．局所的な形 (10.14) を用いると，u_1 は

$$u_1 = \sigma_i(1)\mathrm{P}\exp\left(-\int_0^1 \mathcal{A}_{i\mu}\frac{\mathrm{d}x^\mu(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right) \tag{10.17}$$

で与えられる．

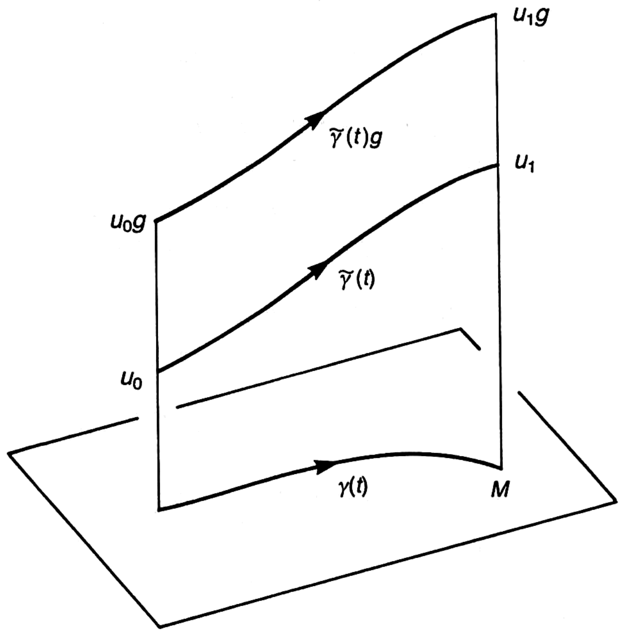


図 10.3. M における曲線 $\gamma(t)$ と水平もち上げ $\tilde{\gamma}(t)$ および $\tilde{\gamma}(t)g$.

系 10.1 から $\Gamma(\tilde{\gamma})$ は右作用 R_g と可換であることが保証される．まず，$R_g\Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = u_1g$ と $\Gamma(\tilde{\gamma})R_g(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0g)$ に注意しよう．$\tilde{\gamma}(t)g$ は u_0g と u_1g を通る水平もち上げである．u_0g を通る水平もち上げの一意性から $u_1g = \Gamma(\tilde{\gamma})(u_0g)$，すなわち $R_g\Gamma(\tilde{\gamma})(u_0) = \Gamma(\tilde{\gamma})R_g(u_0)$ を得る．これは任意の $u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ に対して正しいので，

$$R_g\Gamma(\tilde{\gamma}) = \Gamma(\tilde{\gamma})R_g \tag{10.18}$$

が示された．

問 10.3 $\tilde{\gamma}$ を $\gamma : [0,1] \to M$ の水平もち上げとする．そこで写像 $\Gamma(\tilde{\gamma}^{-1}) : \pi^{-1}(\gamma(1)) \to \pi^{-1}(\gamma(0))$ を考える．ここで $\tilde{\gamma}^{-1}(t) = \tilde{\gamma}(1-t)$ である．このとき，

$$\Gamma(\tilde{\gamma}^{-1}) = \Gamma(\tilde{\gamma})^{-1} \tag{10.19}$$

が成り立つことを示せ．

二つの曲線 $\alpha : [0,1] \to M$ と $\beta : [0,1] \to M$ で，$\alpha(1) = \beta(0)$ となるものを考える．積 $\alpha * \beta$ を

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

によって定義する．$\Gamma(\tilde{\alpha}) : \pi^{-1}(\alpha(0)) \to \pi^{-1}(\alpha(1))$ と $\Gamma(\tilde{\beta}) : \pi^{-1}(\beta(0)) \to \pi^{-1}(\beta(1))$ とする．このとき，

$$\Gamma(\widetilde{\alpha * \beta}) = \Gamma(\tilde{\beta})\Gamma(\tilde{\alpha}) \tag{10.20}$$

を示せ．

問 10.4 $u, v \in P$ が同じ水平もち上げに属するとき，$u \sim v$ と書こう．このとき，$\sim$ は同値関係であることを示せ．

10.2 ホロノミー

10.2.1 諸定義

$P(M, G)$ を主束とする．$\gamma : [0,1] \to M$ を M の曲線とし，$u_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ を通るその水平もち上げを $\tilde{\gamma}$ とする．前章で，点 $u_0 = \tilde{\gamma}(0)$ を $u_1 = \tilde{\gamma}(1)$ にうつす写像 $\Gamma(\tilde{\gamma}) : \pi^{-1}(\gamma(0)) \to \pi^{-1}(\gamma(1))$ を定義した．2 つの曲線 $\alpha, \beta : [0,1] \to M$ で，$\alpha(0) = \beta(0) = p_0$，$\alpha(1) = \beta(1) = p_1$ を満たすものを考えよう．α と β の水平もち上げ $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ で $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = u_0$ となるものをとる．このとき，$\tilde{\alpha}(1)$ は必ずしも $\tilde{\beta}(1)$ に等しいとは限らない．これは $p = \gamma(0) = \gamma(1)$ における<u>ループ</u> $\gamma : [0,1] \to M$ を考えれば，一般に $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ であることを示している．ループ γ はファイバー上で<u>変換</u> $\tau_\gamma : \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(p)$ を定める．この変換は群の右作用と適合する，すなわち

$$\tau_\gamma(ug) = \tau_\gamma(u)g \tag{10.21}$$

であるが，(10.18) から導かれる．τ_γ はループ γ の取り方だけでなく、接続の取り方にも依存する．

例 10.3 $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上の $\mathbb{R}$ 束を考える．接続 1-形式 ω と例 10.2 におけるループ γ は，$g \mapsto g + 2\pi$，$g \in \mathbb{R}$ で与えられる写像 $\tau_\gamma : \pi^{-1}((1,0)) \to \pi^{-1}((1,0))$ を定義する．

$\pi(u) = p$ となる点 $u \in P$ をとり，点 p におけるループの集合 $C_p(M)$ を考える；$C_p(M) \equiv \{\gamma : [0,1] \to M | \gamma(0) = \gamma(1) = p\}$．このとき，集合

$$\Phi_u \equiv \{g \in G | \tau_\gamma(u) = ug, \gamma \in C_p(M)\} \tag{10.22}$$

は，構造群 G の部分群となり，u における**ホロノミー群**とよばれる．Φ_u の群として性質は，問 10.3 から容易に得られる．α, β と $\gamma = \alpha * \beta$ が p におけるループとするとき，$\tau_\gamma = \tau_\beta \tau_\alpha$ を得るので

$$\tau_\gamma(u) = \tau_\beta \tau_\alpha(u) = \tau_\beta(ug_\alpha) = \tau_\beta(u)g_\alpha = ug_\beta g_\alpha$$

が成り立つ．ここで $\tau_\alpha(u) = ug_\alpha$ 等である．これは

$$g_\gamma = g_\beta g_\alpha \tag{10.23}$$

を示している．定数ループ $c : [0,1] \mapsto p$ は変換の単位元 $\tau_c : u \mapsto u$ を定める．γ の逆元となるループ γ^{-1} は逆変換 $\tau_{\gamma^{-1}} = \tau_\gamma^{-1}$ であるので，$g_{\gamma^{-1}} = g_\gamma^{-1}$ である．

問 10.5 (*a*) $\tau_\alpha(u) = ug_\alpha$ とする．このとき，

$$\tau_\alpha(ug) = ug(\mathrm{ad}_g g_\alpha) = ug(g^{-1} g_\alpha g) \tag{10.24}$$

を示せ．また

$$\Phi_{ua} \cong a^{-1} \Phi_u a \tag{10.25}$$

を確かめよ．

(b) $u, u' \in P$ を同じ水平もち上げ $\tilde{\gamma}$ 上の点とする．このとき，$\Phi_u \cong \Phi_{u'}$ を示せ．

(c) M を連結とする．このとき，すべての Φ_u は互いに同型であることを示せ．

問 10.6 $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu}\mathrm{d}x^\mu$ を U_i 上のゲージ・ポテンシャルとし，γ を U_i 上のループとする．$\tau_\gamma(u) = ug_\gamma$ とする．(10.14) を用いて

$$g_\gamma = \exp\left(-\oint_\gamma \mathcal{A}_{i\mu}\mathrm{d}x^\mu\right) \tag{10.26}$$

を示せ．

点 p におけるループで，p における定数ループにホモトピックなものの集合を $C_p^0(M)$ で表す．このとき，群

$$\Phi_u^0 \equiv \{g \in G | \tau_\gamma(u) = ug, \gamma \in C_p^0(M)\} \tag{10.27}$$

は，**制限ホロノミー群** とよばれる．

10.3 曲率

10.3.1 主束における共変微分

第5章で，外微分 $\mathrm{d} : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ を定義した．r-形式はベクトルに作用する実数値形式

$$\eta : TM \wedge \ldots \wedge TM \to \mathbb{R}$$

である．この操作をベクトル値 r-形式 $\phi \in \Omega^r(P) \otimes V$；

$$\phi : TP \wedge \ldots \wedge TP \to V$$

を微分できるように一般化する．ここで，V は k 次元ベクトル空間である．ϕ の最も一般的な形は，$\{e_\alpha\}$ を V の基底，$\phi^\alpha \in \Omega^r(P)$ として，$\phi = \sum_{\alpha=1}^k \phi^\alpha \otimes e_\alpha$ である．

主束 $P(M, G)$ 上の接続 ω は T_uP を $H_uP \oplus V_uP$ に分解する．したがって，ベクトル $X \in T_uP$ は $X = X^H + X^V$ と分解される．ここで，$X^H \in H_uP$, $X^V \in V_uP$ である．

定義 10.4 $\phi \in \Omega^r(P) \otimes V$，$X_1, \ldots, X_{r+1} \in T_uP$ とする．ϕ の**共変微分**は

$$\mathrm{D}\phi(X_1, \ldots, X_{r+1}) \equiv \mathrm{d}_P\phi(X_1^H, \ldots, X_{r+1}^H) \tag{10.28}$$

によって定義される．ここに，$\mathrm{d}_P\phi \equiv \mathrm{d}_P\phi^\alpha \otimes e_\alpha$ である．

10.3.2 曲率

定義 10.5 接続 1-形式 ω の共変微分を**曲率 2-形式** Ω とよぶ；

$$\Omega \equiv \mathrm{D}\omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g} \tag{10.29}$$

命題 10.2 曲率 2-形式は

$$R_a^*\Omega = a^{-1}\Omega a \quad a \in G \tag{10.30}$$

を満たす（(10.3b) と比較せよ）．

証明： まず，$(R_{a*}X)^H = R_{a*}(X^H)$（$R_{a*}$ は水平部分空間を保つ）と $\mathrm{d}_P R_a^* = R_a^* \mathrm{d}_P$ に注意する．定義によって

$$\begin{aligned}
R_a^*\Omega(X,Y) &= \Omega(R_{a*}X, R_{a*}Y) = \mathrm{d}_P\omega((R_{a*}X)^H, (R_{a*}Y)^H) \\
&= \mathrm{d}_P\omega(R_{a*}X^H, R_{a*}Y^H) = R_a^*\mathrm{d}_P\omega(X^H, Y^H) \\
&= \mathrm{d}_P R_a^*\omega(X^H, Y^H) \\
&= \mathrm{d}_P(a^{-1}\omega a)(X^H, Y^H) = a^{-1}\mathrm{d}_P\omega(X^H, Y^H)a \\
&= a^{-1}\Omega(X,Y)a
\end{aligned}$$

を得る．ここで a は定数元であるので $\mathrm{d}_P a = 0$ となることを用いた．■

$\mathfrak{g}$ 値 p-形式 $\zeta = \zeta^\alpha \otimes T_\alpha$ と $\mathfrak{g}$ 値 q-形式 $\eta = \eta^\alpha \otimes T_\alpha$ をとる．ここで，$\zeta^\alpha \in \Omega^p(M)$, $\eta^\alpha \in \Omega^q(M)$ で $\{T_\alpha\}$ は $\mathfrak{g}$ の基底である．ζ と η の交換子を

$$\begin{aligned}
[\zeta, \eta] &\equiv \zeta \wedge \eta - (-1)^{pq}\eta \wedge \zeta \\
&= T_\alpha T_\beta \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta - (-1)^{pq} T_\beta T_\alpha \eta^\beta \wedge \zeta^\alpha \\
&= [T_\alpha, T_\beta] \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \eta^\beta
\end{aligned} \tag{10.31}$$

で定義する．p, q が奇数の時は，(10.31) で $\zeta = \eta$ とおくと

$$[\zeta, \zeta] = 2\zeta \wedge \zeta = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma \otimes \zeta^\alpha \wedge \zeta^\beta$$

を得る．

補題 10.2 $X \in H_uP$, $Y \in V_uP$ とする．このとき，$[X, Y] \in H_uP$ である．

証明： Y を $g(t)$ で生成されるベクトル場とすれば

$$[Y, X] = \lim_{t\to 0} t^{-1}(R_{g(t)*}X - X)$$

である．接続は $R_{g*}H_uP = H_{ug}P$ を満たすので，ベクトル $R_{g(t)*}Y$ は水平方向にあり，ゆえに $[Y, X]$ もそうである．■

定理 10.3 $X, Y \in T_uP$ とする．このとき，Ω と ω は **Cartan 構造方程式**

$$\Omega(X, Y) = \mathrm{d}_P\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \tag{10.32a}$$

を満たし，これはまた

$$\Omega = \mathrm{d}_P\omega + \omega \wedge \omega \tag{10.32b}$$

ともかかれる．[(10.32a) から (10.32b) を得るには

$$\begin{aligned}[\omega,\omega](X,Y) &= [T_\alpha,T_\beta]\omega^\alpha\wedge\omega^\beta(X,Y)\\ &= [T_\alpha,T_\beta][\omega^\alpha(X)\omega^\beta(Y)-\omega^\beta(X)\omega^\alpha(Y)]\\ &= [\omega(X),\omega(Y)]-[\omega(Y),\omega(X)]=2[\omega(X),\omega(Y)]\end{aligned}$$

ゆえに，$\Omega(X,Y)=(\mathrm{d}_P\omega+\frac{1}{2}[\omega,\omega])(X,Y)=(\mathrm{d}_P\omega+\omega\wedge\omega)(X,Y)$ に注意すればよい．]

証明：つぎの 3 つの場合に分けて考える．

(1) $X,Y\in H_uP$ とする．このとき，定義より $\omega(X)=\omega(Y)=0$ である．$X=X^H$, $Y=Y^H$ なので定義 10.5 から $\Omega(X,Y)=\mathrm{d}_P\omega(X^H,Y^H)=\mathrm{d}_P\omega(X,Y)$ を得る．

(2) $X\in H_uP$, $Y\in V_uP$ とする．$Y^H=0$ なので $\Omega(X,Y)=0$ を得る．また，$\omega(X)=0$ も得る．したがって，$\mathrm{d}_P\omega(X,Y)=0$ を証明すればよい．(5.70) から

$$\mathrm{d}_P\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y])=X\omega(Y)-\omega([X,Y])$$

を得る．$Y\in V_uP$ なので，ある元 $V\in\mathfrak{g}$ が存在して $Y=V^\#$ となる．このとき，$\omega(Y)=V$ は定数であるから，$X\omega(Y)=X\cdot V=0$ となる．補題 10.2 から $[X,Y]\in H_uP$ が得られ，したがって $\omega([X,Y])=0$ となるので，$\mathrm{d}_P\omega(X,Y)=0$ が示された．

(3) $X,Y\in V_uP$ に対して $\Omega(X,Y)=0$ を得る．この場合は

$$\mathrm{d}_P\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y])=-\omega([X,Y])$$

となる．X,Y は Lie 括弧積 $[X,Y]\in V_uP$ のもとで閉じていることに注意する．問 10.1 (b) を参照せよ．このとき，ある元 $A\in\mathfrak{g}$ が存在して

$$\omega([X,Y])=A$$

を満たす．ここで $A^\#=[X,Y]$ である．$B^\#=X$, $C^\#=Y$ とする．このとき，$[B,C]^\#=[B^\#,C^\#]$ なので $[\omega(X),\omega(Y)]=[B,C]=A$ である．したがって，

$$0=\mathrm{d}_P\omega(X,Y)+\omega([X,Y])=\mathrm{d}_P\omega(X,Y)+[\omega(X),\omega(Y)]$$

が示された．

Ω は線形かつ歪対称なので，任意のベクトルに対して (10.32) が正しいことを示すには上のの三つの場合で十分である．∎

10.3.3 曲率の幾何学的意味と Ambrose-Singer の定理

第 7 章で Riemann 曲率テンソルがベクトルの平行移動の非可換性を表すことを示した．主束上の曲率にも類似の意味づけがある．まずは，$\Omega(X,Y)$ が水平ベクトル $X,Y\in H_uP$ の Lie 括弧積 $[X,Y]$ の垂直成分を与えることを示す．$\omega(X)=\omega(Y)=0$ から

$$\mathrm{d}_P\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y])=-\omega([X,Y])$$

が得られる．$X^H = X$, $Y^H = Y$ なので

$$\Omega(X, Y) = \mathrm{d}_P\omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) \tag{10.33}$$

を得る．チャート U_i 上の座標系 $\{x^\mu\}$ を考えよう．$V = \partial/\partial x^1$, $W = \partial/\partial x^2$ とする．無限小の平行四辺形 γ で頂点が $\mathrm{O} = \{0\}$, $\mathrm{P} = \{\varepsilon, 0, \ldots, 0\}$, $\mathrm{Q} = \{\varepsilon, \delta, 0, \ldots, 0\}$, $\mathrm{R} = \{0, \delta, 0, \ldots, 0\}$ となるものをとる．γ の水平もち上げ $\tilde{\gamma}$ を考える．$X, Y \in H_uP$ で $\pi_*X = \varepsilon V$, $\pi_*Y = \delta W$ となるものとする．このとき，

$$\pi_*([X, Y]^H) = \varepsilon\delta[V, W] = \varepsilon\delta\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{10.34}$$

である，すなわち $[X, Y]$ は垂直方向にある．上の考察はループ γ の水平もち上げ $\tilde{\gamma}$ が P 内で閉じていないことを示している．この開きは同じファイバー上で始点と終点をつなぐ垂直ベクトル $[X, Y]$ に比例する．曲率はこの距離を測る．

$$\Omega(X, Y) = -\omega([X, Y]) = A \tag{10.35}$$

ここで A は $[X, Y] = A^\#$ となる $\mathfrak{g}$ の元である．

閉曲線の水平もち上げの始点と終点のこうしたずれがちょうどホロノミーであり，ホロノミー群が曲率で表されることを期待させる．

定理 10.4 (Ambrose-Singer) $P(M, G)$ を連結多様体 M 上の G 束とする．点 $u_0 \in P$ のホロノミー群 Φ_{u_0} の Lie 環 $\mathfrak{h}$ は

$$\Omega_u(X, Y) \quad X, Y \in H_uP \tag{10.36}$$

の形の元で張られる $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環と一致する．ここで $u \in P$ は u_0 と同じ水平もち上げ上の点のである．[証明は，Choquet-Bruhat 他 (1982) を参照．]

10.3.4　曲率の局所表示

曲率 Ω の局所表示 $\mathcal{F}$ は，σ を M のチャート U 上で定義された局所切断として

$$\mathcal{F} \equiv \sigma^*\Omega \tag{10.37}$$

によって定義される．($\mathcal{A} = \sigma^*\omega$ と比較せよ．) $\mathcal{F}$ はゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A}$ により

$$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \tag{10.38a}$$

と表される．ここで d は M 上の外微分である．$\mathcal{F}$ の TM のベクトルへの作用は

$$\mathcal{F}(X, Y) = \mathrm{d}\mathcal{A}(X, Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)] \tag{10.38b}$$

によって与えられる．(10.38a) を証明するために，$\mathcal{A} = \sigma^*\omega$, $\sigma^*\mathrm{d}_P\omega = \mathrm{d}\sigma^*\omega$ と $\sigma^*(\zeta \wedge \eta) = \sigma^*\zeta \wedge \sigma^*\eta$ が成り立つことに注意する．Cartan 構造方程式 (10.32a) から

$$\mathcal{F} = \sigma^*(\mathrm{d}_P\omega + \omega \wedge \omega) = \mathrm{d}\sigma^*\omega + \sigma^*\omega \wedge \sigma^*\omega = \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$$

がわかる．

つぎに，座標 $x^\mu = \varphi(p)$ をもつチャート U 上での $\mathcal{F}$ の成分表示を求める．$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu \mathrm{d}x^\mu$ ($\mathcal{A}_\mu \in \mathfrak{g}$) をゲージ・ポテンシャルとする．$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ とかくと，直接の計算から

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \tag{10.39}$$

を得る．$\mathcal{F}$ は曲率 2-形式であり，**(Yang-Mills) 場の強さ**と同一視される．混乱を避けるために，Ω を曲率，$\mathcal{F}$ を (Yang-Mills) 場の強さとよぶことにする．$\mathcal{A}_\mu$ と $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ は $\mathfrak{g}$ 値関数なので，それらは $\mathfrak{g}$ の基底 $\{T_\alpha\}$ を用いて

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu{}^\alpha T_\alpha \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^\alpha T_\alpha \tag{10.40}$$

と展開される．基底ベクトルは通常の交換関係則 $[T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma$ を満たす．こうして，よく知られた表示

$$F_{\mu\nu}{}^\alpha = \partial_\mu A_\nu{}^\alpha - \partial_\nu A_\mu{}^\alpha + f_{\beta\gamma}{}^\alpha A_\mu{}^\beta A_\nu{}^\gamma \tag{10.41}$$

が得られる．

定理 10.5 多様体 M において，U_i と U_j を $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ を満たすチャートとし，$\mathcal{F}_i$ と $\mathcal{F}_j$ を各々のチャート上の場の強さとする．$U_i \cap U_j$ 上でそれらは両立条件

$$\mathcal{F}_j = \mathrm{Ad}_{t_{ij}^{-1}} \mathcal{F}_i = t_{ij}^{-1} \mathcal{F}_i t_{ij} \tag{10.42}$$

を満たす．ここで t_{ij} は $U_i \cap U_j$ 上の変換関数である．

証明：対応するゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A}_i$ と $\mathcal{A}_j$ を導入する．

$$\mathcal{F}_i = \mathrm{d}\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i \quad \mathcal{F}_j = \mathrm{d}\mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j \wedge \mathcal{A}_j$$

そこで，$\mathcal{A}_j = t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}$ を $\mathcal{F}_j$ の式に代入して

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_j &= \mathrm{d}(t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}) + (t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}) \wedge (t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}) \\
&= [-t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij} \wedge t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}\mathcal{A}_i t_{ij} - t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i \wedge \mathrm{d}t_{ij} - t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij} t_{ij}^{-1} \wedge \mathrm{d}t_{ij}] \\
&\quad + [t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i \wedge \mathrm{d}t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij} t_{ij}^{-1} \wedge \mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij} \wedge t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}] \\
&= t_{ij}^{-1}(\mathrm{d}\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i) t_{ij} = t_{ij}^{-1}\mathcal{F}_i t_{ij}
\end{aligned}$$

が確かめられる．ここで，等式 $\mathrm{d}t^{-1} = -t^{-1}\mathrm{d}t t^{-1}$ を用いた．∎

問 10.7 もしゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A}$ が局所的に $\mathcal{A} = g^{-1}\mathrm{d}g$ とかけるとき，$\mathcal{A}$ は**ピュア・ゲージ**とよばれる．このとき，場の強さ $\mathcal{F}$ はピュア・ゲージ $\mathcal{A}$ に対して消えることを示せ．[逆も成り立つことが示される．チャート U 上で $\mathcal{F} = 0$ ならば，ゲージ・ポテンシャルは局所的に $\mathcal{A} = g^{-1}\mathrm{d}g$ と表される．]

10.3.5 Bianchi 恒等式

ω と Ω は $\mathfrak{g}$ に値をもつので，$\mathfrak{g}$ の基底 $\{T_\alpha\}$ を用いて $\omega = \omega^\alpha T_\alpha$，$\Omega = \Omega^\alpha T_\alpha$ とかける．このとき，(10.32*b*) は

$$\Omega^\alpha = \mathrm{d}_P\omega^\alpha + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \tag{10.43}$$

となる．(10.43) の外微分は

$$\mathrm{d}_P\Omega^\alpha = f_{\beta\gamma}{}^\alpha \mathrm{d}_P\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + f_{\beta\gamma}{}^\alpha \omega^\beta \wedge \mathrm{d}_P\omega^\gamma \tag{10.44}$$

となる．水平ベクトル X に対して $\omega(X) = 0$ であることに注意すると，

$$\mathrm{D}\Omega(X, Y, Z) = \mathrm{d}_P\Omega(X^H, Y^H, Z^H) = 0$$

を得る．ここで $X, Y, Z \in T_uP$ である．こうして，**Bianchi 恒等式**

$$\mathrm{D}\Omega = 0 \tag{10.45}$$

が得られたことになる．

Bianchi 恒等式の局所表示を求めよう．(10.44) に σ^* を作用させると，左辺に対して $\sigma^*\mathrm{d}_P\Omega = \mathrm{d}\cdot\sigma^*\Omega = \mathrm{d}\mathcal{F}$ となり，右辺は

$$\begin{aligned}\sigma^*(\mathrm{d}_P\omega \wedge \omega - \omega \wedge \mathrm{d}_P\omega) &= \mathrm{d}\sigma^*\omega \wedge \sigma^*\omega - \sigma^*\omega \wedge \mathrm{d}\sigma^*\omega \\ &= \mathrm{d}\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathrm{d}\mathcal{A} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F}\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} - \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} = \mathrm{d}\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0 \tag{10.46}$$

が得られる．ここで，$\mathcal{D}$ の M 上の $\mathfrak{g}$ 値 p-形式 η への作用は

$$\mathcal{D}\eta \equiv \mathrm{d}\eta + [\mathcal{A}, \eta] \tag{10.47}$$

で定義されるものである．$G = \mathrm{U}(1)$ に対しては $\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{F}$ であることに注意せよ．

10.4 同伴ベクトル束上の共変微分

主束 $P(M, G)$ 上の接続 1-形式は自然な方法で P の同伴束にも共変微分を定義することを可能にする．

10.4.1 同伴束上の共変微分

物理学では，ある主束に同伴するベクトル束の切断を微分する必要がしばしば生じる．例えば，量子電磁気学における荷電スカラー場は，U(1) 束 $P(M, \mathrm{U}(1))$ に同伴する複素直線

束の切断と見なされる．切断を共変的に微分することはゲージ不変作用を構成する上で極めて重要である．

$P(M,G)$ を射影 π_P の G 主束とする．M のチャート U_i と U_i 上の切断 σ_i をとる．また，標準的な自明化 $\phi_i(p,e)=\sigma_i(p)$ をとる．曲線 $\gamma:[0,1]\to U_i$ の水平もち上げを $\tilde{\gamma}$ とする．$\gamma(0)=p_0$，$\tilde{\gamma}(0)=u_0$ と表しておく．この主束には，射影を π_E とするベクトル束 $E=P\times_\rho V$ が同伴する；§ 9.4 を参照．$X\in T_{p_0}M$ を p_0 において $\gamma(t)$ に接する接ベクトルとする．$s\in\Gamma(M,E)$ を M 上の切断，すなわちベクトル場とする．E の元を $[(u,v)]=\{(ug,\rho(g)^{-1}v|\ u\in P, v\in V, g\in G\}$ と書くことにする．同値類の代表元をとることは，ゲージを固定することに該当する．つぎの形をしたもの

$$s(p)=[(\sigma_i(p),\xi(p))] \tag{10.48}$$

を代表元に選ぶ．

さて E において，M 上の曲線 γ に沿ったベクトルの平行移動を定義する．もちろん，'$\xi(\gamma(t))$ は $\gamma(t)$ に沿って定数であるとき ξ は平行移動された' というナイーブな憶測は意味をなさない，なぜならば，この主張は切断 $\sigma_i(p)$ の選び方に依存するからである．る．そこで，あるベクトルが P における γ の水平もち上げ $\tilde{\gamma}$ に関して定数であるとき，そのベクトルは平行移動されたと定義しよう．言い換えれば，η が $\gamma(t)$ に沿って定数であるとき，切断 $s(\gamma(t))=[(\tilde{\gamma}(t),\eta(\gamma(t)))]$ は平行移動されたという．$\tilde{\gamma}'(t)$ が γ の別の水平もち上げであるとき，$\tilde{\gamma}'(t)=\tilde{\gamma}(t)a$, $a\in G$ と書けることから，$\eta(\gamma(t))$ を $\eta(t)$ で表すと（簡単のため ρ を省略して）

$$[(\tilde{\gamma}(t),\eta(t))]=[(\tilde{\gamma}'(t)a^{-1},\eta(t))]=[(\tilde{\gamma}'(t),a^{-1}\eta(t))]$$

が得られるので，この定義は水平もち上げの選び方によらない固有のものである．ゆえに $\eta(t)$ が $\gamma(t)$ に沿って定数ならば，その定数倍 $a^{-1}\eta(t)$ もまた定数である．

さて，これで共変微分を定義する準備ができた．$s(p)$ を E の切断とする．曲線 $\gamma:[0,1]\to M$ の任意の水平もち上げを $\tilde{\gamma}(t)$ とすると，$\gamma(t)$ にそって $s(t)=[(\tilde{\gamma}(t),\eta(t))]$ が得られる．$p_0=\gamma(0)$ における $s(t)$ の $\gamma(t)$ に沿った**共変微分**は

$$\nabla_X s\equiv\left[\left(\tilde{\gamma}(0),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(\gamma(t))\bigg|_{t=0}\right)\right] \tag{10.49}$$

によって定義される．ここで，X は p_0 における $\gamma(t)$ の接ベクトルである．共変微分の定義が固有のものであるためには，余分な情報，つまり特別な水平もち上げにはよらないはずである．$\tilde{\gamma}'(t)=\tilde{\gamma}(t)a\quad(a\in G)$ を γ の別の水平もち上げとする．$\tilde{\gamma}'(t)$ が共変微分を定義するために用いられる水平もち上げに選ばれていれば，代表元 $[\tilde{\gamma}'(t),a^{-1}\eta(t))]$ を得る．すると，共変微分は

$$\left[\left(\tilde{\gamma}'(0),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{a^{-1}\eta(t)\}\bigg|_{t=0}\right)\right]=\left[\left(\tilde{\gamma}'(0)a^{-1},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t)\bigg|_{t=0}\right)\right]$$

で与えられ，(10.49) と一致する．ゆえに，$\nabla_X s$ は接ベクトル X と切断 $s\in\Gamma(M,E)$ にのみ依り，水平もち上げ $\tilde{\gamma}(t)$ の取り方にはよらない．この定義は，曲線 γ と接続にのみ依存し，局所自明化には依存しない．共変微分の局所表示は実際の計算には便利であるので，後で与えられる．

ここまで点 $p_0 = \gamma(0)$ における共変微分を定義してきた．X がベクトル場ならば，∇_X は切断 s を新しい切断 $\nabla_X s$ に写すので，∇_X は写像 $\Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$ と見なされるのは明らかだろう．もっと正確には，p においての値が $X_p \in T_pM$ である $X \in \mathfrak{X}(M)$ をとる．すると，曲線 $\gamma(t)$ で $\gamma(0) = p$ かつ p における接ベクトルが X_p となるものが存在する．このとき，γ の水平もち上げ $\tilde{\gamma}(t)$ は共変微分 $\nabla_X s|_p \equiv \nabla_{X_p} s$ の計算を可能にする．また，写像 $\nabla : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E) \otimes \Omega^1(M)$ を

$$\nabla s(X) \equiv \nabla_X s \quad X \in \mathfrak{X}(M) \quad s \in \Gamma(M, E) \tag{10.50}$$

によって定める．

問 10.8 つぎを示せ．

(a)

$$\nabla_X(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla_X s_1 + a_2 \nabla_X s_2 \tag{10.51a}$$

(a′)

$$\nabla(a_1 s_1 + a_2 s_2) = a_1 \nabla s_1 + a_2 \nabla s_2 \tag{10.51a′}$$

(b)

$$\nabla_{(a_1 X_1 + a_2 X_2)} s = a_1 \nabla_{X_1} s + a_2 \nabla_{X_2} s \tag{10.51b}$$

(c)

$$\nabla_X(fs) = X[f]s + f\nabla_X s \tag{10.51c}$$

(c′)

$$\nabla(fs) = (\mathrm{d}f)s + f\nabla s \tag{10.51c′}$$

(d)

$$\nabla_{fX} s = f\nabla_X s \tag{10.51d}$$

ここで $a_i \in \mathbb{R}$, $s, s' \in \Gamma(M, E)$, $f \in \mathcal{F}(M)$ である．

10.4.2　共変微分の局所表示

実際の計算では共変微分の局所座標表示を用いたほうが便利である．$P(M, G)$ を G 主束，$E = P \times_\rho V$ を同伴ベクトル束とする．局所切断 $\sigma_i \in \Gamma(U_i, P)$ をとり，標準的な自明化 $\sigma_i(p) = \phi_i(p, e)$ を採用する．$\gamma : [0, 1] \to M$ を U_i における曲線，$\tilde{\gamma}$ をその水平もち上げとする．$\tilde{\gamma}$ は

$$\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t) g_i(t) \tag{10.52}$$

とかかれる．ここに $g_i(t) \equiv g_i(\gamma(t)) \in G$ である．$e_\alpha{}^0$ を V の α 番目の基底ベクトルとして，E の切断 $e_\alpha(p) \equiv [(\sigma_i(p), e_\alpha{}^0)]$ をとる；$(e_\alpha{}^0)^\beta = (\delta_\alpha)^\beta$．このとき，

$$e_\alpha(t) = [(\tilde{\gamma}(t) g_i(t)^{-1}, e_\alpha{}^0)]$$

$$= [(\tilde{\gamma}(t), g_i(t)^{-1} e_\alpha{}^0)] \tag{10.53}$$

を得る．$g_i(t)^{-1}$ は γ に沿って基底が変化するのを補正するように $e_\alpha{}^0$ に作用する．e_α の共変微分はこのとき

$$\begin{aligned}\nabla_X e_\alpha &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{g_i(t)^{-1} e_\alpha{}^0\}\Big|_{t=0}\right)\right] \\ &= \left[\left(\tilde{\gamma}(0), -g_i(t)^{-1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_i(t)\right\} g_i(t)^{-1} e_\alpha{}^0\Big|_{t=0}\right)\right] \\ &= [(\tilde{\gamma}(0) g_i(0)^{-1}, \mathcal{A}_i(X) e_\alpha{}^0)]\end{aligned} \tag{10.54}$$

で与えられる．ここで (10.13*b*) を用いた．(10.54) から局所表示

$$\nabla_X e_\alpha = [(\sigma_i(0), \mathcal{A}_i(X) e_\alpha{}^0)] \tag{10.55}$$

が得られる．$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu}\mathrm{d}x^\mu = \mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta \mathrm{d}x^\mu$ とする．ここで，$\mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta \equiv \mathcal{A}_{i\mu}{}^\gamma (T_\gamma)^\alpha{}_\beta$ である．(10.55) の第2成分は

$$\mathcal{A}_i(X) e_\alpha{}^0 = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} e_\beta{}^0 \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\gamma \delta_\alpha{}^\gamma = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta{}^0$$

である．これを (10.55) に代入して，結局

$$\nabla_X e_\alpha = \left[\left(\sigma_i(0), \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta{}^0\right)\right] = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta \tag{10.56a}$$

すなわち

$$\nabla e_\alpha = \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha e_\beta \tag{10.56b}$$

を得る．特に，座標曲線 x^μ に対して

$$\nabla_{\partial/\partial x^\mu} e_\alpha = \mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta{}_\alpha e_\beta \tag{10.57}$$

を得る．主束 P 上の接続 $\mathcal{A}$ が同伴束 E 上の共変微分を（表現を法として）完全に決定するというのは驚くべきことである．

問 10.9 $s(p) = [(\sigma_i(p), \xi_i(p))] = \xi_i{}^\alpha(p) e_\alpha$ を E の一般の切断とする．ここで，$\xi_i(p) = \xi_i{}^\alpha(p) e_\alpha{}^0$ である．問 10.8 の結果を用いて

$$\nabla_X s = \left[\left(\sigma_i(0), \frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}_i(X)\xi_i\Big|_{t=0}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{\partial \xi_i{}^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta \xi_i{}^\beta\right\} e_\alpha \tag{10.58}$$

の成り立つことを確かめよ．

構成の仕方から，共変微分は局所自明化にはよらない．これはまた $\nabla_X s$ の局所表示からも確かめられる．$\sigma_i(p)$ と $\sigma_j(p)$ を，交わりが空でないチャート U_i と U_j 上の局所切断とする．$U_i \cap U_j$ 上では $\sigma_j(p) = \sigma_i(p) t_{ij}(p)$ となる．i-自明化において

$$\nabla_X s = \left[\left(\sigma_i(0), \frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}_i(X)\xi_i\Big|_{t=0}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\sigma_j(0)\cdot t_{ij}^{-1}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t_{ij}\xi_j) + \mathcal{A}_i(X)t_{ij}\xi_j\bigg|_{t=0}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\sigma_j(0), \frac{\mathrm{d}\xi_j}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}_j(X)\xi_j\bigg|_{t=0}\right)\right] \tag{10.59}$$

を得る．ここで条件 (10.9) を用いている．(10.59) の最後の行は，j-自明化で表された $\nabla_X s$ である．

こうして，(10.49) で定義された共変微分は局所切断と同様に水平もち上げにもよらないことを見た．局所自明化を変えても，$\nabla_X s$ が E の切断として矛盾無く定義されるようにゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A}_i$ は変換される．この意味で，∇_X は同伴束上の最も自然な微分であり，主束 P の接続とも両立するのである．

例 10.4 § 7.2 で得られた結果を再現しよう．FM を M 上のフレーム束，TM をその同伴束とする．$FM = P(M, \mathrm{GL}(m,\mathbb{R}))$ と $TM = FM \times_\rho \mathbb{R}^m$ に注意する．ここで $m = \dim M$ であり，ρ は $\mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$ の $m\times m$ 行列表現である．$\mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ の元は，$m\times m$ 行列である．局所接続形式 $\mathcal{A}_i$ を $\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\mathrm{d}x^\mu$ とかこう．このとき，

$$\nabla_{\partial/\partial x^\mu} e_\alpha = [(\sigma_i(0), \Gamma_\mu e_\alpha{}^0)] = \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} e_\beta \tag{10.60}$$

が得られることになるが，これと (7.14) 式を比較参照されたい．一般の切断（ベクトル場）$s(p) = [(\sigma_i(p), X_i(p))] = X_i{}^\alpha(p) e_\alpha$ に対して

$$\nabla_{\partial/\partial x^\mu} s = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} X_i{}^\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} X^\beta\right) e_\alpha \tag{10.61}$$

を得るが，これは § 7.2 の結果を再現している．$\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}$ における添字 α,β,μ の役割は，それらの性質において大変異なっている；μ は $\Omega^1(M)$ の添字であり，α,β は $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ の添字である．

例 10.5 複素スカラー場 ϕ と結合する $\mathrm{U}(1)$ ゲージ場を考えよう．関連するファイバー束は，$\mathrm{U}(1)$ 束 $P(M, \mathrm{U}(1))$ とその同伴束 $E = P\times_\rho \mathbb{C}$ である．ここで ρ は複素数と $\mathrm{U}(1)$ の元との自然な同一視である．ω に対する局所表示は $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu}\mathrm{d}x^\mu$ で，$\mathcal{A}_{i\mu} = \mathcal{A}_i(\partial/\partial x^\mu)$ は Maxwell 理論のベクトル・ポテンシャルである．M の曲線 γ は $\gamma(0)$ において接ベクトル X をもつとする．局所切断 σ_i をとり，γ の水平もち上げ $\tilde{\gamma}$ を $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$ と表す．$1\in\mathbb{C}$ を基底ベクトルにとれば，基底切断は

$$e = [(\sigma_i(p), 1)]$$

である．$\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi(p))] = \Phi(p)e$ $(\Phi : M\to\mathbb{C})$ を E の切断とする．これは複素スカラー場と同一視される．$\tilde{\gamma}(t)$ に関して，切断は $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(t)}$ とすると，$\tilde{\gamma}(t)$ を用いて切断は

$$\phi(t) = \Phi(t)[(\tilde{\gamma}(t), g(t)^{-1})] \tag{10.62}$$

で与えられる．γ に沿う ϕ の共変微分は

$$\nabla_X\phi = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}[(\tilde{\gamma}(0), g(0)^{-1})] + \Phi(0)[(\tilde{\gamma}(0), g(0)^{-1}\mathcal{A}_i(X)\cdot 1)]$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}_{i\mu}\Phi\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\right) e = X^\mu\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}\Phi\right) e \tag{10.63}$$

である．

例 10.6 M 上の SU(2)Yang-Mills 理論を考えよう．関係する束は SU(2) 束 $P(M, \mathrm{SU}(2))$ とその同伴束 $E = P \times_\rho \mathbb{C}^2$ である．ここで 2 次元表現をとっている．U_i 上のゲージ・ポテンシャルは

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu}\mathrm{d}x^\mu = A_{i\mu}{}^\alpha\left(\frac{\sigma_\alpha}{2\mathrm{i}}\right)\mathrm{d}x^\mu \tag{10.64}$$

である．ここで $\sigma_\alpha/2\mathrm{i}$ は SU(2) の生成元，σ_α は Pauli 行列である．$e_\alpha{}^0$ $(\alpha = 1, 2)$ を $\mathbb{C}^2$ の基底ベクトルとし，切断

$$e_\alpha(p) \equiv [(\sigma_i(p), e_\alpha{}^0)] \tag{10.65}$$

を考える．ここで $\sigma_i(p)$ は U_i 上の標準的自明化を定める．$\phi(p) = [(\sigma_i(p), \Phi^\alpha(p)e_\alpha{}^0)]$ を M 上の E の切断とする．水平もち上げ $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(p)g(t)$ に沿って

$$\phi(t) = [(\tilde{\gamma}(t), g(t)^{-1}\Phi^\alpha(t)e_\alpha{}^0)] \tag{10.66}$$

を得る．$X = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ に沿う ϕ の共変微分は

$$\nabla_X\phi = \left[\left(\tilde{\gamma}(0), g(0)^{-1}\frac{\mathrm{d}\Phi^\alpha(0)}{\mathrm{d}t}e_\alpha{}^0\right)\right] + [(\tilde{\gamma}(0), g(0)^{-1}\mathcal{A}_i(X)^\alpha{}_\beta\Phi^\beta(0)e_\alpha{}^0)]$$

$$= X^\mu\left(\frac{\partial\Phi^\alpha}{\partial x^\mu} + \mathcal{A}_{i\mu}{}^\alpha{}_\beta\Phi^\beta\right)e_\alpha \tag{10.67}$$

となる．ここで最後の等式を得るために (10.13*b*) を用いた．

問 10.10 同伴束 $E_{\mathfrak{g}} = P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{g}$ を考えよう．ここで G の $\mathfrak{g}$ への作用は随伴作用 $V \to \mathrm{Ad}_g V = g^{-1}Vg$, $V \in \mathfrak{g}, g \in G$ である．局所切断 $\sigma_i \in \Gamma(U_i, P)$ で $\tilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)g(t)$ となるものをとる．$E_{\mathfrak{g}}$ の切断 $s(p) = [(\sigma_i(p), V(p))]$ をとる．ここで $V(p) = V^\alpha(p)T_\alpha$ で，$\{T_\alpha\}$ は $\mathfrak{g}$ の基底である．共変微分 $\mathcal{D}_X s$ を

$$\mathcal{D}_X s \equiv \left[\left(\tilde{\gamma}(0), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\mathrm{Ad}_{g(t)^{-1}}V(t)\}\Big|_{t=0}\right)\right] \tag{10.68a}$$

によって定義する．このとき

$$\mathcal{D}_X s \equiv \left[\left(\sigma_i(0), \frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} + [\mathcal{A}_i(X), V(t)]\Big|_{t=0}\right)\right]$$

$$= X^\mu\left[\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\mu} + f_{\beta\gamma}{}^\alpha\mathcal{A}_{i\mu}{}^\beta V^\gamma\right][(\sigma_i(0), T_\alpha)] \tag{10.68b}$$

を示せ．

10.4.3 曲率再訪

共変微分 $\nabla_X s$ は (10.50) によって作用素 $\nabla : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E \otimes \Omega^1(M))$ を定める．もっと一般に，∇ のベクトル値 p-形式 $s \otimes \eta$, $\eta \in \Omega^p(M)$ への作用は

$$\nabla(s \otimes \eta) \equiv (\nabla s) \wedge \eta + s \otimes \mathrm{d}\eta \tag{10.69}$$

で定義される．U_i を M のチャートとし，σ_i を U_i 上の P の切断とする．U_i 上の標準的局所自明化をとる．さて，

$$\nabla\nabla e_\alpha = e_\beta \otimes \mathcal{F}_i{}^\beta{}_\alpha \tag{10.70}$$

を証明しよう．ここで $e_\alpha = [(\sigma_i, e_\alpha{}^0)] \in \Gamma(U_i, E)$ である．実際直接の計算から

$$\begin{aligned}\nabla\nabla e_\alpha &= \nabla(e_\beta \otimes \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha) = \nabla e_\beta \wedge \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha + e_\beta \otimes \mathrm{d}\mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha \\ &= e_\beta \otimes (\mathrm{d}\mathcal{A}_i{}^\beta{}_\alpha + \mathcal{A}_i{}^\beta{}_\gamma \wedge \mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\alpha) = e_\beta \otimes \mathcal{F}_i{}^\beta{}_\alpha\end{aligned}$$

となる．

問 10.11 $s(p) = \xi^\alpha(p) e_\alpha(p)$ を E の切断とする．このとき

$$\nabla\nabla s = e_\alpha \otimes \mathcal{F}_i{}^\alpha{}_\beta \xi^\beta \tag{10.71}$$

を示せ．

10.4.4 内積を保つ接続

$E \xrightarrow{\pi} M$ を，正定値内積 g をもち、各点 $p \in M$ で作用が

$$g_p : \pi^{-1}(p) \otimes \pi^{-1}(p) \to \mathbb{R} \tag{10.72}$$

となるベクトル束とする．このとき g は E 上の **Riemann 計量**を定めるという．接続 ∇ は，内積を保つとき**計量接続**とよばれる．

$$\mathrm{d}[g(s, s')] = g(\nabla s, s') + g(s, \nabla s') \tag{10.73}$$

特に，$s = e_\alpha, s' = e_\beta$ ととり，$g(e_\alpha, e_\beta) = g_{\alpha\beta}$ とおけば

$$\mathrm{d}g_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\alpha g_{\gamma\beta} + \mathcal{A}_i{}^\gamma{}_\beta g_{\alpha\gamma} \tag{10.74}$$

が導かれる．これと (7.30b) を比較されたい．もし，$E = TM$ で，さらに捩率がゼロの条件が課されれば，我々の接続は Riemann 幾何学における Levi-Civita 接続に帰着する．

内積が与えられると，フレーム $\{\hat{e}_\alpha\}$ で $g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ を満たす**正規直交フレーム**がとれるとしてよい．構造群 G は，k をファイバー次元として $\mathrm{O}(k)$ にとっておく．Lie 環 $\mathfrak{o}(k)$ は歪対称行列がつくるベクトル空間であり，接続 1-形式 ω は

$$\omega^\alpha{}_\beta = -\omega^\beta{}_\alpha \tag{10.75}$$

を満たす．

定理 10.6 E を内積 g をもつベクトル束，∇ を 直交 フレームに伴う共変微分とする．このとき，∇ は計量接続である．

証明： g は双一次なので，$s = f\hat{e}_\alpha, s' = f'\hat{e}_\beta$，$f, f' \in \mathcal{F}(M)$ に対して

$$\mathrm{d}[g(s,s')] = g(\nabla s, s') + g(s, \nabla s')$$

を示すだけで十分である．実際，左辺は $\mathrm{d}[g(f\hat{e}_\alpha, f'\hat{e}_\beta)] = \mathrm{d}[ff'\delta_{\alpha\beta}] = \mathrm{d}(ff')\delta_{\alpha\beta}$ であるが，右辺は

$$\begin{aligned} g(\nabla f\hat{e}_\alpha, f'\hat{e}_\beta) + g(f\hat{e}_\alpha, \nabla f'\hat{e}_\beta) &= g(\mathrm{d}f\hat{e}_\alpha + f\hat{e}_\gamma \omega^\gamma{}_\alpha, f'\hat{e}_\beta) \\ &\quad + g(f\hat{e}_\alpha, \mathrm{d}f'\hat{e}_\beta + f'\hat{e}_\gamma\omega^\gamma{}_\beta) \\ &= \mathrm{d}ff'\delta_{\alpha\beta} + ff'\omega^\gamma{}_\alpha\delta_{\gamma\beta} + f\mathrm{d}f'\delta_{\alpha\beta} + ff'\omega^\gamma{}_\beta\delta_{\alpha\gamma} \\ &= \mathrm{d}(ff')\delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

である．ここで最後の等式を得るために (10.75) を用いた．

10.4.5 正則ベクトル場と Hermite 内積

定義 10.6 E と M を複素多様体，$\pi : E \to M$ を正則な全射とする．E が正則ベクトル束であるとは:

(i) 典型ファイバーが $\mathbb{C}^k$ で，構造群が $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$

(ii) 局所自明化 $\phi_i : U_i \times \mathbb{C}^k \to \pi^{-1}(U_i)$ は両解析的写像である

(iii) 変換関数 $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G = \mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$ は正則写像である

を満たすときをいう．

例えば，M を $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ の複素多様体とする．**正則接束** $TM^+ \equiv \bigcup_{p\in M} T_pM^+$ は正則ベクトル束である．典型ファイバーは $\mathbb{C}^m$ で，局所基底は $\{\partial/\partial z^\mu\}$ である．

h を正則ベクトル束上の内積で，$p \in M$ におけるその作用が $h_p : \pi^{-1}(p) \times \pi^{-1}(p) \to \mathbb{C}$ であるものとする．最も自然な内積は **Hermite 内積**で

(i) $u, v, w \in \pi^{-1}(p), a, b \in \mathbb{C}$ に対して $h_p(u, av + bw) = ah_p(u,v) + bh_p(u,w)$

(ii) $h_p(u,v) = \overline{h_p(v,u)} \quad u, v \in \pi^{-1}(p)$,

(iii) $h_p(u,u) ge 0, h_p(u,u) = 0 \iff u = \phi_i(p, 0)$

(iv) $s_1, s_2 \in \Gamma(M,E)$ に対して $h(s_1,s_2) \in \mathcal{F}(M)^{\mathbb{C}}$

を満たすときをいう.

切断 $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_k\}$ の集合が

$$h(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \delta_{ij} \tag{10.76}$$

を満たすとき，この集合を**ユニタリー・フレーム**という．構造群 $\mathrm{U}(m)$ は複素多様体ではないので，ユニタリー・フレーム束 LM は正則ベクトル束ではない.

Hermite 構造 h が与えられたときに，h と矛盾なく共存する接続を定義しよう．**Hermite 接続** ∇ は線形写像 $\Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E \otimes T^*M^{\mathbb{C}})$ でつぎを満たすものとする.

(i) $\nabla(fs) = (\mathrm{d}f)s + f\nabla s \qquad f \in \mathcal{F}(M)^{\mathbb{C}}, s \in \Gamma(M, E)$

(ii) $\mathrm{d}[h(s_1, s_2)] = h(\nabla s_1, s_2) + h(s_1, \nabla s_2)$

(iii) 行き先にしたがい，∇ の作用を $\nabla s = \mathrm{D}s + \bar{\mathrm{D}}s$ と分解する．ここに，$\mathrm{D}s$ $(\bar{\mathrm{D}}s)$ は $(1,0)$-形式（$(0,1)$-形式）に値をもつ切断である．$\bar{D}$ に関しては，$\bar{\mathrm{D}} = \bar{\partial}$ を要求する.

E と Hermite 計量 h が与えられると，一意的なHermite 接続が存在することが示される．曲率はその Hermite 接続から定義される．$\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_k\}$ をユニタリー・フレームとし，局所接続形式 $\mathcal{A}^{\beta}{}_{\alpha}$ を

$$\nabla \hat{e}_{\alpha} = \hat{e}_{\beta}\mathcal{A}^{\beta}{}_{\alpha} \tag{10.77}$$

によって定義する．場の強さは

$$\mathcal{F} \equiv \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \tag{10.78}$$

で定義される．このとき

$$\nabla\nabla\hat{e}_{\alpha} = \nabla(\hat{e}_{\beta}\mathcal{A}^{\beta}{}_{\alpha}) = \hat{e}_{\beta}\mathcal{F}^{\beta}{}_{\alpha} \tag{10.79}$$

が示される.

$\mathcal{A}$ と $\mathcal{F}$ が共に歪対称であることを示そう：

$$\begin{aligned}
0 = \mathrm{d}\delta_{\alpha\beta} &= \mathrm{d}h(\hat{e}_{\alpha}, \hat{e}_{\beta}) \\
&= h(\nabla\hat{e}_{\alpha}, \hat{e}_{\beta}) + h(\hat{e}_{\alpha}, \nabla\hat{e}_{\beta}) = \bar{\mathcal{A}}^{\beta}{}_{\alpha} + \mathcal{A}^{\alpha}{}_{\beta} \\
\mathcal{F}^{\beta}{}_{\alpha} + \bar{\mathcal{F}}^{\alpha}{}_{\beta} &= \mathrm{d}\mathcal{A}^{\beta}{}_{\alpha} + \mathcal{A}^{\beta}{}_{\gamma} \wedge \mathcal{A}^{\gamma}{}_{\alpha} + \mathrm{d}\bar{\mathcal{A}}^{\alpha}{}_{\beta} + \bar{\mathcal{A}}^{\alpha}{}_{\gamma} \wedge \bar{\mathcal{A}}^{\gamma}{}_{\alpha} \\
&= \mathrm{d}(\mathcal{A}^{\beta}{}_{\alpha} - \mathcal{A}^{\beta}{}_{\alpha}) + \mathcal{A}^{\beta}{}_{\gamma} \wedge \mathcal{A}^{\gamma}{}_{\alpha} + \mathcal{A}^{\gamma}{}_{\alpha} \wedge \mathcal{A}^{\alpha}{}_{\gamma} = 0
\end{aligned}$$

したがって

$$\mathcal{A}^{\alpha}{}_{\beta} = -\bar{\mathcal{A}}^{\beta}{}_{\alpha} \quad \mathcal{F}^{\beta}{}_{\alpha} = -\bar{\mathcal{F}}^{\alpha}{}_{\beta} \tag{10.80}$$

が示された.

つぎに $\mathcal{F}$ は $(1,1)$-形式であることを示そう．$\{\hat{e}_{\alpha}\}$ をユニタリー・フレームとする．$\mathcal{F}$ は両次数 $(0,2)$ の成分をもち得ない，というのは

$$\hat{e}_{\beta}\mathcal{F}^{\beta}{}_{\alpha} = \nabla\nabla\hat{e}_{\alpha} = (\mathrm{D} + \bar{\partial})(\mathrm{D} + \bar{\partial})\hat{e}_{\alpha} = \mathrm{DD}\hat{e}_{\alpha} + (\mathrm{D}\bar{\partial} + \bar{\partial}\mathrm{D})\hat{e}_{\alpha}$$

となるからである．$\mathcal{F}^{\beta}{}_{\alpha} = -\bar{\mathcal{F}}^{\alpha}{}_{\beta}$ から，$\bar{\mathcal{F}}$ も両次数 $(0,2)$ の成分をもち得ないので $\mathcal{F}$ は両次数 $(2,0)$ の成分をももたないことがしたがう．したがって，$\mathcal{F}^{\beta}{}_{\alpha}$ は両次数 $(1,1)$ の 2-形式である.

10.5　ゲージ理論

いままで何度か注意してきたように，ゲージ・ポテンシャルは主束における接続の局所的表現と見なされる．このとき，Yang-Mills 場の強さは接続に伴う曲率の局所表示に他ならない．ここでは，幾何学的視点から，ゲージ理論の興味ある諸相を概説する．

10.5.1　U(1) ゲージ理論

電磁気学における Maxwell の理論は，U(1) ゲージ理論により解釈される．U(1) は可換で 1 次元であるから，添字 $\alpha, \beta, \ldots$ はすべて省略し，構造定数は $f_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0$ とする．底空間 M は 4 次元 Minkowski 時空と仮定する．系 9.1 から，U(1) 束 P は自明，すなわち $P = \mathbb{R}^4 \times \mathrm{U}(1)$ であり，M 上の局所自明化はただ一つですむことがわかる．ゲージ・ポテンシャルは

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu \mathrm{d}x^\mu \tag{10.81}$$

と表される．このゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A}$ は，通常のベクトル・ポテンシャル A とはリー環に伴う因子 i の分だけ異なる：$\mathcal{A}_\mu = \mathrm{i}A_\mu$．また，場の強さは

$$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} \tag{10.82a}$$

である．成分表示すると，

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial \mathcal{A}_\nu / \partial x^\mu - \partial \mathcal{A}_\mu / \partial x^\nu \tag{10.82b}$$

となる．$\mathcal{F}$ は Bianchi 恒等式を満たす，

$$\mathrm{d}\mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} - \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} = 0 \tag{10.83a}$$

これは最初から期待されることである．なぜならば，$\mathcal{F}$ が完全形式，$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A}$；したがって閉形式，$\mathrm{d}\mathcal{F} = \mathrm{d}^2\mathcal{A} = 0$，だからである．成分でかくと，

$$\partial_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + \partial_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} + \partial_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} = 0 \tag{10.83b}$$

となる．そこで成分 $\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \mathrm{i}F_{\mu\nu}$ を電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ を用いて

$$E_i = F_{i0}, B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \tag{10.84}$$

とかけば，(10.83b) は Maxwell 方程式の 2 式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{10.83c}$$

に帰着する．これらの方程式は，力学的というよりむしろ幾何学的である．系の力学を求めるためには，作用を決めなくてはならない．**Maxwell 作用** $\mathcal{S}_\mathrm{M}[\mathcal{A}]$ は $\mathcal{A}$ の汎関数で，

$$\mathcal{S}_\mathrm{M}[\mathcal{A}] \equiv \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x = -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x \tag{10.85a}$$

によって与えられる．

問 10.12 (*a*) $*\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\mathcal{F}^{\kappa\lambda}\varepsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ を $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ の双対とする．このとき

$$\mathcal{S}_{\mathrm{M}}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{F} \wedge *\mathcal{F} \tag{10.85b}$$

を示せ．

(*b*) (10.84) を用いて

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2) \tag{10.86}$$

を示せ．また

$$F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} \tag{10.87}$$

を示せ．

$\mathcal{A}_{\mu\nu}$ に関する $\mathcal{S}_{\mathrm{M}}[\mathcal{A}]$ の変分によって，運動方程式

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{10.88a}$$

を得る．この方程式は，(真空中の) Maxwell 方程式の 2 つ目の組

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \quad \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{10.88b}$$

に帰着することがわかる．

10.5.2 Dirac の磁気モノポール

ここまで $\mathbb{R}^4$ 上で定義された電磁気学に関する Maxwell 理論を調べてきた．底空間が自明であるために，U(1) 束も自明性となる．また Poincaré の補題は，場の強さ $\mathcal{F}$ が大域的に完全形式であることも保証する；$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A}$．そこで我々の解析を，自明でない底空間上の U(1) 束に拡張することは興味深い．簡単のため，すべての量は時間によらないと仮定する．

Dirac モノポールは，$\mathbb{R}^3$ から原点を除いた空間で定義される．$\mathbb{R}^3 - \{0\}$ は S^2 と同じホモトピー型をもつので，いま問題にする束は，U(1) 束 $P(S^2, \mathrm{U}(1))$ である．S^2 は二つのチャート

$$U_{\mathrm{N}} \equiv \{(\theta,\phi) | 0 \le \theta \le \frac{1}{2}\pi + \varepsilon\}, \quad U_{\mathrm{S}} \equiv \{(\theta,\phi) | \frac{1}{2}\pi - \varepsilon \le \theta \le \pi\}$$

によって被覆される．ここで，θ と ϕ は極座標である．ω を P 上の Ehresmann 接続とする．U_{N} (U_{S}) 上の局所切断 σ_{N} (σ_{S}) を選び，局所ゲージ・ポテンシャルを

$$\mathcal{A}_{\mathrm{N}} = \sigma_{\mathrm{N}}^*\omega \quad \mathcal{A}_{\mathrm{S}} = \sigma_{\mathrm{S}}^*\omega$$

で定義する．ただし，$\mathcal{A}_{\mathrm{N}}$ と $\mathcal{A}_{\mathrm{S}}$ は，Wu-Yang のゲージ・ポテンシャルとなるように選んでいる（§1.3 を参照）；

$$\mathcal{A}_{\mathrm{N}} = \mathrm{i}g(1 - \cos\theta)\mathrm{d}\phi \quad \mathcal{A}_{\mathrm{S}} = -\mathrm{i}g(1 + \cos\theta)\mathrm{d}\phi \tag{10.89}$$

ここで，g はモノポールの強さである．

$t_{\rm NS}$ を赤道 $U_{\rm N}\cap U_{\rm S}$ 上で定義された変換関数とする．$t_{\rm NS}$ は，S^1（赤道）から U(1)（構造群）への写像を定め，それは $\pi_1(\mathrm{U}(1))\cong\mathbb{Z}$ で分類される．例 9.7 を参照せよ．そこで，

$$t_{\rm NS}(\phi)=\exp[\mathrm{i}\varphi(\phi)]\quad \varphi\in\mathbb{R} \tag{10.90}$$

と書くことにしよう．$U_{\rm N}\cap U_{\rm S}$ 上で，ゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A}_{\rm N}$ と $\mathcal{A}_{\rm S}$ は

$$\mathcal{A}_{\rm N}=t_{\rm NS}^{-1}\mathcal{A}_{\rm S}t_{\rm NS}+t_{\rm NS}^{-1}\mathrm{d}t_{\rm NS}=\mathcal{A}_{\rm S}+\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi \tag{10.91}$$

によって関係付けられる．ゲージ・ポテンシャル (10.89) に関しては

$$\mathrm{d}\varphi=-\mathrm{i}(\mathcal{A}_{\rm N}-\mathcal{A}_{\rm S})=2g\mathrm{d}\phi$$

が得られる．ϕ は赤道のまわりを 0 から 2π まで変化する間に，$\varphi(\phi)$ は

$$\Delta\varphi\equiv\int\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}2g\mathrm{d}\phi=4\pi g \tag{10.92}$$

の範囲をとる．したがって，$t_{\rm NS}$ が一意的に定義されるためには，$\Delta\varphi$ は 2π の倍数でなければならない；

$$\Delta\varphi/2\pi=2g\in\mathbb{Z} \tag{10.93}$$

これは磁気モノポールの量子化条件である．整数 $2g$ はこのファイバー束が属するホモトピー類を表している．この数は，$F_{\rm N}=\mathrm{d}A_{\rm N}$ と $F_{\rm S}=\mathrm{d}A_{\rm S}$（$\mathcal{F}_{\rm N}=\mathrm{i}F_{\rm N}$ など）を考えることによっても得られる．全フラックス Φ は

$$\begin{aligned}\Phi&=\int_{S^2}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{U_{\rm N}}\mathrm{d}A_{\rm N}+\int_{U_{\rm S}}\mathrm{d}A_{\rm S}\\&=\int_{S^1}A_{\rm N}-\int_{S^1}A_{\rm S}=2g\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=4\pi g\end{aligned} \tag{10.94}$$

である．したがって，曲率，すなわち場の強さ $\mathrm{d}A_{\rm N}$ と $\mathrm{d}A_{\rm S}$ がファイバー束の捩れ具合を特徴づけることになる．これに関しては，さらに 11 章で論ずる．

10.5.3 Aharonov-Bohm 効果

電磁気学の初歩では，電場と磁場（すなわち $F_{\mu\nu}$）が考察の中心である．ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル $\phi=A_0$ は，2 次的な重要性しかもたないと思われてきた．しかしながら量子力学では，現象を記述するには $F_{\mu\nu}$ だけでは不十分であり，$A_\mu=(\boldsymbol{A},A_0)$ を用いることが本質的である様々な状況がある．これらの例の一つが **Aharonov-Bohm 効果**である．

Aharonov-Bohm (AB) の実験は，概念的に図 10.4 のように表される．電荷 e をもつ電子のビームが $x=-\infty$ から入り，スクリーン C 上に干渉模様を形成する．無限の長さのソレノイドがビームの真ん中に置かれている．シールド S は電子がソレノイドを貫通するのを妨げている．したがって，電子は磁場を全く感じない．では，ゲージ場 A_μ はどうであろうか？

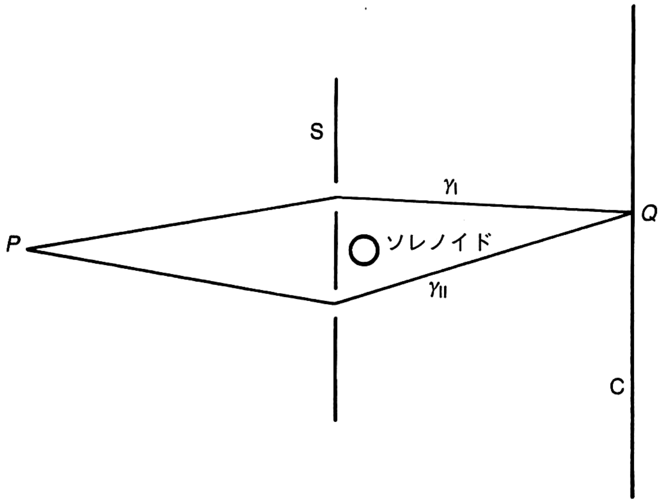


図 **10.4.** Aharonov-Bohm の実験．ソレノイドの外側では，$\boldsymbol{B}=0$.

簡単のため，全フラックス $\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ を一定に保ったまま，ソレノイドの半径を無限小とする．すると容易に

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\left(-\frac{y\Phi}{2\pi r^2},\frac{x\Phi}{2\pi r^2},0\right)\qquad A_0=0 \tag{10.95}$$

は，$\int(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\Phi$ で $r\neq 0$ に対して $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ を満たすことが確かめられる．ベクトル・ポテンシャルはソレノイドの外側では消えない．Lorentz 力 $e(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ はビームの通る道上では消えるので，古典的にはソレノイドは電子に影響を及ぼすことはできない．

量子力学では，この系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ は

$$\mathcal{H}=-\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\mathrm{i}eA_\mu\right)^2+V(\boldsymbol{r}) \tag{10.96}$$

である．ここで $V(\boldsymbol{r})$ は実験装置の影響を表す．半古典的には，図 10.4 において経路 γ_{I} と γ_{II} を区別することができる．$\boldsymbol{A}=0$ のとき，γ_{I} (γ_{II}) に対応する波動関数を ψ_{I} (ψ_{II}) とかくことにする．もし $\boldsymbol{A}\neq 0$ ならば，波動関数はゲージ変換された形で与えられる；

$$\psi_i^{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})\equiv\exp\left(\mathrm{i}\,e\int_P^{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right)\psi_i(\boldsymbol{r})\qquad(i=\mathrm{I},\mathrm{II}) \tag{10.97}$$

ここで P は装置から遠く離れた基準点である．さて，$\psi_{\mathrm{I}}^{A}(P)=\psi_{\mathrm{II}}^{A}(P)$ となるような波動関数 ψ_{I} と ψ_{II} の重ね合わせ $\psi_{\mathrm{I}}^{A}+\psi_{\mathrm{II}}^{A}$ を考えよう．スクリーン上の点 Q におけるその振幅は

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{I}}^{\boldsymbol{A}}(Q)+\psi_{\mathrm{II}}^{\boldsymbol{A}}(Q)&=\exp\left(\mathrm{i}e\int_{\gamma_{\mathrm{I}}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right)\psi_{\mathrm{I}}(Q)\\&\quad+\exp\left(\mathrm{i}e\int_{\gamma_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right)\psi_{\mathrm{II}}(Q)\\&=\exp\left(\mathrm{i}e\int_{\gamma_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right)\left[\exp\left(\mathrm{i}e\oint_{\gamma}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right)\psi_{\mathrm{I}}(Q)+\psi_{\mathrm{II}}(Q)\right]\end{aligned} \tag{10.98}$$

である．ここに $\gamma \equiv \gamma_{\rm I} - \gamma_{\rm II}$ である．電子が運動する空間の点において，たとえ $\boldsymbol{B}=0$ であったとしても，波動関数はベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ に依存する．Stokes の定理から

$$\oint_\gamma \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Phi \tag{10.99}$$

が得られる．ここに S は γ を境界とする曲面である．このことと (10.98) から，

$$e(\Phi_{\rm a} - \Phi_{\rm b}) = 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{10.100}$$

を満たすフラックス $\Phi_{\rm a}$ と $\Phi_{\rm b}$ に対して干渉模様は同じでなければならないことが分かる．

Aharonov-Bohm 効果の根底にある幾何学的背景は一体何であろうか？ 問題は本質的に 2 次元なので，領域 $M=\mathbb{R}^2$ でソレノイドが原点にあるものを考えればよいだろう．この場合のファイバー束は主束 $P(M, \mathrm{U}(1))$ とその同伴束 $E = P \times_\rho \mathbb{C}$ である．ここで $\mathrm{U}(1)$ は $\mathbb{C}$ に普通に作用している．E は M 上の複素直線束で，その切断が波動関数 ψ である．

Lie 環に値をもつ 1 次形式 $\mathcal{A} = \mathrm{i}A = \mathrm{i}A_\mu \mathrm{d}x^\mu$ を定義しよう．この局所接続に伴う共変微分は，$\mathcal{D} = \mathrm{d} + \mathcal{A}$ で，$\mathcal{A}$ は (10.95) で定められるものである．$\mathrm{d}\mathcal{A} = \mathcal{F} = 0$ であるから，この接続は局所平坦である．さて，原点にあるソレノイドを囲む単位円 S^1 を考えよう．S^1 を $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ パラメタ表示し，S^1 上の接続を

$$\mathcal{A} = \mathrm{i}\frac{\Phi}{2\pi}\mathrm{d}\theta \tag{10.101}$$

とかく．これは，(10.95) で $r=1$ とおくことによって得られる．すると，波動関数 ψ はこの局所接続に関して S^1 に沿って平行移動される，すなわち

$$\mathcal{D}\psi(\theta) = \left(\mathrm{d} + \mathrm{i}\frac{\Phi}{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\psi(\theta) = 0 \tag{10.102}$$

であることを要求する．(10.102) の解は簡単に求められて

$$\psi(\theta) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi\theta/2\pi} \tag{10.103}$$

である．この切断 ψ を取ることは，電子の速度は無視することに等しい．するとホロノミー $\Gamma : \pi^{-1}(\theta=0) \to \pi^{-1}(\theta=0)$ は

$$\Gamma : \psi(0) \longmapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi}\psi(0) \tag{10.104}$$

となることが分かる．

実際の実験では，縁効果を消去するために，トロイダル・パーマロイ（鉄 20 %ニッケル 80 %）が用いられている（Tonomura 他, 1983）．パーマロイの厚さは数ミクロンであり，電子が磁場を横切るのを妨げるために金メッキされている．

10.5.4 Yang-Mills 理論

$\mathbb{R}^4$ 上で定義される SU(2) ゲージ理論を考えよう．このゲージ理論を記述する束は，$P(\mathbb{R}^4, \mathrm{SU}(2))$ である．$\mathbb{R}^4$ は可縮なので，ただ一つのゲージ・ポテンシャル

$$\mathcal{A} = A_\mu{}^\alpha T_\alpha \mathrm{d}x^\mu \tag{10.105}$$

で十分である．ここで，$T_\alpha \equiv \sigma_\alpha/2\mathrm{i}$ はリー環 $\mathfrak{su}(2)$ を生成し

$$[T_\alpha, T_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma$$

を満たす．この場合，場の強さは

$$\mathcal{F} \equiv \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \tag{10.106a}$$

である．ここに

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] = F_{\mu\nu}{}^\alpha T_\alpha \tag{10.106b}$$

$$F_{\mu\nu}{}^\alpha = \partial_\mu A_{\nu\alpha} - \partial_\nu A_{\mu\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{\mu\beta} A_{\nu\gamma} \tag{10.106c}$$

である．Bianchi 恒等式は

$$\mathcal{DF} = \mathrm{d}\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0 \tag{10.107}$$

である．また，Yang-Mills 作用は

$$\mathcal{S}_{\mathrm{YM}}[\mathcal{A}] \equiv -\frac{1}{4}\int_M \mathrm{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge *\mathcal{F}) \tag{10.108}$$

で与えられる．$\mathcal{A}_\mu$ に関する変分は

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0,\ \text{あるいは}\ \mathcal{D} * \mathcal{F} = 0 \tag{10.109}$$

を与える．

10.5.5 インスタントン

経路積分は Euclid 計量をもつ空間上でのみ定義可能である．積分を求めるために，Euclid 的作用の極小値を求め，それらのまわりの量子的ゆらぎを計算することが重要となる．4 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^4$ 上で SU(2) ゲージ理論を考えよう．この理論の極小値は**インスタントン**（あるいは**擬粒子**，Belavin 他 (1975)）として知られる．§1.4 を参照．その Euclid 的作用は

$$\mathcal{S}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{YM}}[\mathcal{A}] = \frac{1}{4}\int_M \mathrm{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge *\mathcal{F}) \tag{10.110}$$

であることが容易に確かめられる．ここで，Hodge $*$ は Euclid 計量に関して取っている．§1.4 で示したように，インスタントンに対応する場の強さは自己双対（反自己双対）

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \pm * \mathcal{F}_{\mu\nu} \tag{10.111}$$

である．自己双対（反自己双対）場に対する作用は

$$\mathcal{S}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{YM}}[\mathcal{A}] = -\frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge *\mathcal{F}) = \mp\frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}) \tag{10.112}$$

である．

インスタントンの位相的性質を考えよう．作用が

$$|x| \to L\ \text{のとき}\qquad \mathcal{A}_\mu(x) \to g(x)^{-1}\partial_\mu g(x) \tag{10.113}$$

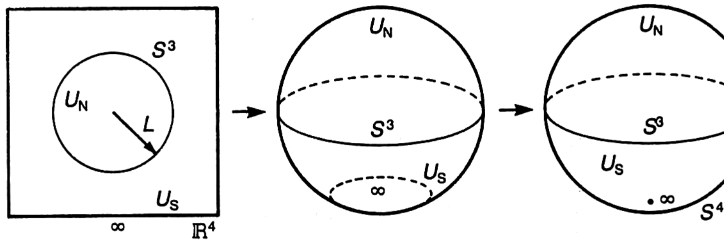


図 **10.5.** $\mathbb{R}^4$ の S^4 への一点コンパクト化

のもとで有限になることを要求しよう．ここに L は任意の正数である．方程式 $|x| = L$ は3次元球面を表すので，(10.113) は写像 $g : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ を定めるが，この写像は $\pi_3(\mathrm{SU}(2)) \cong \mathbb{Z}$ で分類される．このことは変換関数にどのように反映されるのだろうか？　$\mathbb{R}^4$ に無限遠点を加えてコンパクト化する．そこで，S^4 の南極点が無限遠点，北極点が原点を表すとする．このコンパクト化のもとで，$\mathbb{R}^4$ を二つの部分に分け，それぞれを S^4 の南半球 U_{S} と北半球 U_{N} と見なす；

$$U_{\mathrm{N}} = \{x \in \mathbb{R}^4 | |x| \le L + \varepsilon\} \tag{10.114a}$$

$$U_{\mathrm{S}} = \{x \in \mathbb{R}^4 | |x| geL - \varepsilon\} \tag{10.114b}$$

図 10.5 を参照せよ．U_{S} 上のゲージ・ポテンシャルには‘捩れ’は無いと仮定し

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}}(x) \equiv 0 \quad x \in U_{\mathrm{S}} \tag{10.115}$$

と選ぶ．このとき，このファイバー束に関するすべての情報は，‘赤道’S^3 $(= U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}})$ 上の $\mathcal{A}_{\mathrm{N}}(x)$ すなわち変換関数 $t_{\mathrm{NS}}(x)$ に含まれている．$\mathcal{A}_{\mathrm{S}} = 0$ なので，$x \in U_{\mathrm{N}} \cap U_{\mathrm{S}}$ に対して

$$\mathcal{A}_{\mathrm{N}} = t_{\mathrm{NS}}^{-1} \mathcal{A}_{\mathrm{S}} t_{\mathrm{NS}} + t_{\mathrm{NS}}^{-1} \mathrm{d} t_{\mathrm{NS}} = t_{\mathrm{NS}}^{-1} \mathrm{d} t_{\mathrm{NS}} \tag{10.116}$$

を得る．したがって，(10.113) における $g(x)$ は変換関数 $t_{\mathrm{NS}}(x)$ と同一視され，写像 $g : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ を分類することは，$\pi_3(\mathrm{SU}(2)) = \mathbb{Z}$ により変換関数を分類することと同じである；例 9.11 を参照．

さて，Coleman (1979) に従い写像 $g : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ の写像度を計算しよう．最初に，

$$t^4 \mathbf{1} + t^i \sigma_i \in \mathrm{SU}(2) \leftrightarrow \boldsymbol{t}^2 + (t^4)^2 = 1$$

により，$\mathrm{SU}(2) \simeq S^3$ が成り立つことに注意する．したがって，写像 $g : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ は $\pi_3(\mathrm{SU}(2)) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ により分類される．容易につぎのことがわかる：

(*a*) 定数写像

$$g_0 : x \in S^3 \mapsto e \in \mathrm{SU}(2) \tag{10.117a}$$

は，$\pi_3(\mathrm{SU}(2))$ の自明な類に属する．

(*b*) 恒等写像（これは実際に恒等写像 $S^3 \to S^3$ のことである）

$$g_1 : x \mapsto \frac{1}{r}[x^4 \mathbf{1} + x^i \sigma_i], \quad r^2 = \boldsymbol{x}^2 + (x^4)^2 \tag{10.117b}$$

は，$\pi_3(\mathrm{SU}(2))$ の 1 の類を定める．このホモトピー類に対応するゲージ・ポテンシャルの具体的な形は §1.4 で与えられている．

(c) 写像

$$g_n \equiv (g_1)^n : x \mapsto r^{-n}[x^4\mathbf{1} + x^i\sigma_i]^n \tag{10.117c}$$

は，$\pi_3(\mathrm{SU}(2))$ の n の類に属する．

磁気モノポールの強さ（charge）は場の強さ $\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A}$ の球面 S^2 上の積分によって与えられることを思い出そう．類似の関係がインスタントン数についても存在することを期待したい．インスタントンは S^4 上で定義されるので S^4 上で積分される 4-形式を求めなくてはならない．自然な 4-形式は，$\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$ である．以下では，まぎらわしくない限り外積の記号は省略する（例えば，$\mathcal{F}^2$ は $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F}$ を表す）．$\mathrm{tr}\mathcal{F}^2$ が閉形式であることを確かめると

$$\mathrm{dtr}\mathcal{F}^2 = \mathrm{tr}[\mathrm{d}\mathcal{F}\mathcal{F} + \mathcal{F}\mathrm{d}\mathcal{F}] = \mathrm{tr}\{-[\mathcal{A}, \mathcal{F}]\mathcal{F} - \mathcal{F}[\mathcal{A}, \mathcal{F}]\} = 0 \tag{10.118}$$

となる．ここで Bianchi 恒等式 $\mathrm{d}\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$ を用いた．[注：今の場合，S^4 上の任意の 4-形式は閉形式なので，(10.118) の計算は自明に見える．しかしながら，(10.118) は高次元多様体上でもそのまま成り立つことに注意せよ．] Poincaré の補題によって，閉形式 $\mathrm{tr}\,\mathcal{F}^2$ は局所的には完全であり

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{F}^2 = \mathrm{d}K \tag{10.119}$$

である．ここで K は局所 3-形式である．したがって，$\mathrm{tr}\mathcal{F}^2$ は de Rham コホモロジー群 $H^4(S^4)$ の元である．じつは，$\mathrm{tr}\mathcal{F}^2$ は第 2Chern 指標で，K はその Chern-Simons 形式であることが分かる，第 11 章を参照．

補題 10.3 (10.119) における 3-形式 K は

$$K = \mathrm{tr}[\mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3] \tag{10.120}$$

で与えられる．

証明： 直接の計算から

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}K &= \mathrm{tr}[(\mathrm{d}\mathcal{A})^2 + \frac{2}{3}(\mathrm{d}\mathcal{A}\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{A}\mathcal{A} + \mathcal{A}^2\mathrm{d}\mathcal{A})] \\
&= \mathrm{tr}[(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2)(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2) \\
&\qquad + \frac{2}{3}\{(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2)\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2)\mathcal{A} + \mathcal{A}^2(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2)\}] \\
&= \mathrm{tr}[\mathcal{F}^2 - \mathcal{A}^2\mathcal{F} - \mathcal{F}\mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^4 + \frac{2}{3}(\mathcal{F}\mathcal{A}^2 - \mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{A} + \mathcal{A}^2\mathcal{F} - \mathcal{A}^4)]
\end{aligned}$$

である．ここに等式 $\mathrm{d}\mathcal{A} = \mathcal{F} - \mathcal{A}^2$ を用いた．ところで，

$$\mathrm{tr}\mathcal{A}^4 = 0, \quad \mathrm{tr}\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{A} = -\mathrm{tr}\mathcal{A}^2\mathcal{F} = -\mathrm{tr}\mathcal{F}\mathcal{A}^2$$

が成り立つことに注意する．例えば，

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{A} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathcal{A}_\kappa\mathcal{F}_{\lambda\mu}\mathcal{A}_\nu \mathrm{d}x^\kappa \wedge \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\kappa\mathcal{F}_{\lambda\mu}\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\kappa \wedge \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\mu = -\mathrm{tr}\mathcal{A}^2\mathcal{F}
\end{aligned}$$

が得られる．ここで，トレースの巡回性と $\mathrm{d}x^\mu$ の反可換性を用いた．このとき，$\mathrm{d}K$ は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}K &= \mathrm{tr}[\mathcal{F}^2 - \mathcal{A}^2\mathcal{F} - \mathcal{F}\mathcal{A}^2 + \frac{2}{3}\{\mathcal{F}\mathcal{A}^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{F}\mathcal{A}^2 + \mathcal{A}^2\mathcal{F}) + \mathcal{A}^2\mathcal{F}\}] \\ &= \mathrm{tr}\mathcal{F}^2\end{aligned}$$

となり，主張が示された．■

補題 10.4 $\mathcal{A}$ をインスタントンのゲージ・ポテンシャルとする．このとき，

$$\int_{S^4} \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 = -\frac{1}{3}\int_{S^3} \mathrm{tr}\mathcal{A}^3 \tag{10.121}$$

が成り立つ．

証明： まず Stokes の定理から

$$\int_{U_\mathrm{N}} \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 = \int_{U_\mathrm{N}} \mathrm{d}K = \int_{S^3} K$$

となる．ただし，U_N は (10.114) で定義されたものであり，$S^3 = \partial U_\mathrm{N}$ である．S^3 上では，$\mathcal{F} = 0$ なので

$$K = \mathrm{tr}[\mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3] = \mathrm{tr}[\mathcal{A}(\mathcal{F} - \mathcal{A}^2) + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3] = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\mathcal{A}^3$$

を得るが，このことから

$$\int_{U_\mathrm{N}} \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 = \int_{S^4} \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 = -\frac{1}{3}\int_{S^3} \mathrm{tr}\mathcal{A}^3$$

であることが示される．ここに，$\int_{U_\mathrm{S}} \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 = 0$ （$\mathcal{A}_\mathrm{S} \equiv 0$ に注意）を加えた．■

$\mathrm{tr}\mathcal{F}^2$ はゲージ変換のもとで不変

$$\mathrm{tr}\mathcal{F}^2 \to \mathrm{tr}[g^{-1}\mathcal{F}^2 g] = \mathrm{tr}\mathcal{F}^2$$

であることに注意しよう．したがって，$\mathrm{tr}\mathcal{F}^2$ が特別な接続の取り方にはよらない，束の位相的情報を含んでいると推測するのは合理的であろう．そこで，前に与えたゲージ場 (10.117*a-c*) を再び考えよう．するとつぎのことがわかる：

(*a*) $g_0(x) \equiv e$ に対して，S^3 上で $\mathcal{A} = 0$ を得る．束が自明なので，S^4 全体で $\mathcal{A} \equiv 0$ としてもよい．このとき，$\mathcal{F} = 0$，ゆえに

$$\int_{S^4} \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 = -\frac{1}{3}\int_{S^3} \mathrm{tr}\mathcal{A}^3 = 0 \tag{10.122}$$

である．この関係式は滑らかなゲージ変換によって $\mathcal{A} = 0$ から得られる任意のゲージ・ポテンシャル，すなわち $\mathcal{A}(x) = g(x)^{-1}\mathrm{d}g(x), x \in S^4$ の形の任意のゲージ・ポテンシャルに対して正しいことに注意せよ．

(*b*) つぎに (10.117*b*) によって与えられる S^3 上に値をもつゲージ・ポテンシャル

$$\mathcal{A} = \frac{1}{r}(x^4 - \mathrm{i}x^k\sigma_k)\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}(x^4 + \mathrm{i}x^l\sigma_l)\right) \tag{10.123}$$

について考える．g_1 は S^3 を $\mathrm{SU}(2) \cong S^3$ の上に一様にうつすので，被積分関数 $\mathrm{tr}\mathcal{A}^3$ は積分を実行する S^3 上の点によらないことに注意すれば，かなり計算を簡略化することができる．そこで，単位球面の北極点（$x^4 = 1, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$）でこれを評価してもよい．このとき，$\mathcal{A} = \mathrm{i}\sigma_k\mathrm{d}x^k$ となることと

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\mathcal{A}^3 &= \mathrm{i}^3\mathrm{tr}[\sigma_i\sigma_j\sigma_k]\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \\ &= 2\varepsilon_{ijk}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = 12\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3\end{aligned} \tag{10.124}$$

であることがわかる．つぎに，(x^1, x^2, x^3) は S^3 の各半球上で良い座標系で，$\omega \equiv \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$ は北極点で体積要素となることに注意する．よって

$$\int_{S^3} \mathrm{tr}\mathcal{A}^3 = 12\int_{S^3}\omega = 12(2\pi^2) = 24\pi^2$$

が得られる．ここで $2\pi^2$ は単位球面 S^3 の面積である．結局

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4}\mathrm{tr}\mathcal{F}^2 = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{tr}\mathcal{A}^3 = 1 \tag{10.125}$$

が得られる．

(c) つぎに，(10.117*c*) で与えられる写像 $g_n : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ を考えよう．まずは，$g_2 = g_1g_1$ が写像度 2 をもつことを示そう．S^3 を北半球 U_N と南半球 U_S に分ける．写像 $g_1 : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ が与えられると，g_1 を滑らかに変形して，$g_{1\mathrm{N}}$ が写像度 1 をもち，$x \in U_\mathrm{S}$ に対して $g_{1\mathrm{N}}(x) = e$ となるようにいつでもできる．あらゆる変化は U_N 上で起こるのである．同様に，g_1 を変形して，$g_{1\mathrm{S}}$ が同じ写像度 1 をもち，$x \in U_\mathrm{N}$ に対して $g_{1\mathrm{S}}(x) = e$ となるとしてよい．この変形のもとで，g_2 は

$$g_2(x) \to g_2'(x) = \begin{cases} g_{1\mathrm{N}}(x) & x \in U_\mathrm{N} \\ g_{1\mathrm{S}}(x) & x \in U_\mathrm{S}\end{cases}$$

となる．$\mathcal{A}(x) = g_2'(x)^{-1}\mathrm{d}g_2'(x)$ $(x \in S^3)$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{24\pi^3}\int_{S^3}\mathrm{tr}\mathcal{A}^3 &= \frac{1}{24\pi^2}\left(\int_{U_\mathrm{N}}\mathrm{tr}(g_{1\mathrm{N}}^{-1}\mathrm{d}g_{1\mathrm{N}})^3 + \int_{U_\mathrm{S}}\mathrm{tr}(g_{1\mathrm{S}}^{-1}\mathrm{d}g_{1\mathrm{S}})^3\right) \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned} \tag{10.126}$$

を得る．同様のことを繰り返して，$\mathcal{A}(x) = g_n'^{-1}\mathrm{d}g_n'$ に対しては

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^4}\mathrm{tr}\mathcal{F}^2 = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{tr}\mathcal{A}^3 = n \tag{10.127}$$

が得られる．これらの結果をまとめると，つぎの定理を証明したことになる．

定理 10.7 写像 $g : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ の写像度は

$$n = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3}\mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g)^3 = \frac{1}{2}\int_{S^4}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^2 \tag{10.128}$$

で与えられる．

10.6　Berry の位相

k 個のパラメタ $\boldsymbol{R} = (R_1, \ldots, R_k)$ に依存する量子系のハミルトニアンを $H(\boldsymbol{R})$ とする．$|n; \boldsymbol{R}\rangle$ を $H(\boldsymbol{R})$ の規格化された n 番目の固有状態

$$H(\boldsymbol{R})|n; \boldsymbol{R}\rangle = E_n(\boldsymbol{R})|n; \boldsymbol{R}\rangle \quad \langle n; \boldsymbol{R}|n; \boldsymbol{R}\rangle = 1 \tag{10.129}$$

とする．$E_n(\boldsymbol{R})$ は孤立していて，かつ非退化であると仮定する．また，$\boldsymbol{R}$ はパラメタ空間において閉ループをなすと仮定する．すなわち $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t)$ は，$\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{R}(1)$ を満たす．さらに，$\boldsymbol{R}$ は断熱変化し，状態はつねに n 番目の固有状態にあると仮定する．パラメタ空間 M におけるループを一周すると，状態は余分な位相因子

$$\eta_n \equiv \mathrm{i} \oint_\gamma \left\langle n; \boldsymbol{R} \left| \frac{\partial}{\partial R^\mu} \right| n; \boldsymbol{R} \right\rangle \mathrm{d}R^\mu \tag{10.130}$$

を獲得する．これが **Berry の位相**として知られているものである；§1.7 を参照．Berry の位相に深い幾何学的意味が隠されているのを最初に見いだしたのが Simon (1983) であった．彼は，Berry の位相の起源がパラメタ空間におけるホロノミーに因ることを発見した．この視点を Berry (1984), Simon (1983), Aitchison (1987), Zumino (1987) に従って明らかにしていこう．

10.6.1　Berry の位相，Berry の接続，Berry の曲率

M をパラメタ空間を記述する多様体とし，$\boldsymbol{R} = (R^1, \ldots, R^k)$ をその局所座標とする．M の各点 $\boldsymbol{R}$ において，ハミルトニアン $H(\boldsymbol{R})$ の規格化された n 番目の固有状態を考える．量子状態 $|n; \boldsymbol{R}\rangle$ は $e^{\mathrm{i}\phi}|n; \boldsymbol{R}\rangle$ と区別できないので，物理状態は同値類

$$[|\boldsymbol{R}\rangle] \equiv \{g|\boldsymbol{R}\rangle | g \in \mathrm{U}(1)\} \tag{10.131}$$

で表される．ここでは n 番目の固有ベクトルだけが考察の対象なので指数 n を省略している（図 10.6）．M の各点 $\boldsymbol{R}$ において，$\mathrm{U}(1)$ の自由度が存在するので，パラメタ空間 M 上の $\mathrm{U}(1)$ 束 $P(M, \mathrm{U}(1))$ が得られる．射影は，$\pi(g|\boldsymbol{R}\rangle) = \boldsymbol{R}$ で与えられる．

各点 $\boldsymbol{R} \in M$ において $|\boldsymbol{R}\rangle$ の位相を固定することは，切断を選ぶことに相当する．$\sigma(\boldsymbol{R}) = |\boldsymbol{R}\rangle$ を M のチャート U 上の局所切断とする．このとき，標準的な局所自明化は

$$\phi^{-1}(|\boldsymbol{R}\rangle) = (\boldsymbol{R}, e) \tag{10.132}$$

で与えられる．‘右’ 作用により

$$\phi^{-1}(|\boldsymbol{R}\rangle \cdot g) = (\boldsymbol{R}, e)g = (\boldsymbol{R}, g) \tag{10.133}$$

となる．

さて，束構造が定義されたので，その上の接続を与えよう．そこで，**Berry の接続**を

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu \mathrm{d}R^\mu \equiv \langle \boldsymbol{R}|(\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle) = -(\mathrm{d}\langle \boldsymbol{R}|)|\boldsymbol{R}\rangle \tag{10.134}$$

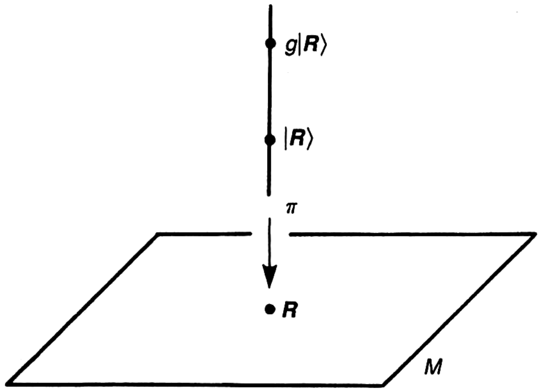


図 10.6. 断熱パラメタ $\boldsymbol{R}$ に依存する量子力学系のファイバー

によって定義しよう．ここで $\mathrm{d} = (\partial/\partial R^\mu)\mathrm{d}R^\mu$ は $\boldsymbol{R}$-空間における外微分である．また，

$$0 = \mathrm{d}(\langle \boldsymbol{R}|\boldsymbol{R}\rangle) = (\mathrm{d}\langle \boldsymbol{R}|)|\boldsymbol{R}\rangle + \langle \boldsymbol{R}|\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle = \langle \boldsymbol{R}|\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle^\dagger + \langle \boldsymbol{R}|\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle$$

となるので，$\mathcal{A}$ は反 Hermite であることに注意する．(10.134) が実際接続の局所表示であることを確かめるには，両立条件が成り立つことを示さなければならない．U_i と U_j を M 上で共通部分をもつチャートとし，そこでの局所切断をそれぞれ $\sigma_i(\boldsymbol{R}) = |\boldsymbol{R}\rangle_i$, $\sigma_j(\boldsymbol{R}) = |\boldsymbol{R}\rangle_j$ とする．これらは変換関数により，$|\boldsymbol{R}\rangle_j = |\boldsymbol{R}\rangle_i t_{ij}(\boldsymbol{R})$ で結ばれている．このとき，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_j(\boldsymbol{R}) &= {}_j\langle \boldsymbol{R}|\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle_j = t_{ij}(\boldsymbol{R})^{-1}{}_i\langle \boldsymbol{R}|[\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle_i t_{ij}(\boldsymbol{R}) + |\boldsymbol{R}\rangle \mathrm{d}t_{ij}(\boldsymbol{R})] \\ &= \mathcal{A}_i(\boldsymbol{R}) + t_{ij}(\boldsymbol{R})^{-1}\mathrm{d}t_{ij}(\boldsymbol{R})\end{aligned} \tag{10.135}$$

であることがわかる．(10.135) を満たす 1-形式の集合 $\{\mathcal{A}_i\}$ は $P(M, \mathrm{U}(1))$ 上に Ehresmann 接続を定める．

$\mathcal{A}$ の場の強さ $\mathcal{F}$ は **Berry の曲率**とよばれ，

$$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} = (\mathrm{d}\langle \boldsymbol{R}|) \wedge (\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle) = \left(\frac{\partial\langle \boldsymbol{R}|}{\partial R^\mu}\right)\left(\frac{\partial|\boldsymbol{R}\rangle}{\partial R^\nu}\right)\mathrm{d}R^\mu \wedge \mathrm{d}R^\nu \tag{10.136}$$

によって与えられる．原子物理からの例を見たあと，この幾何的構造がいかに Berry の位相に反映されるかを明らかにしよう．

例 10.7 '速い' 自由度 $\boldsymbol{r}$ と '遅い' 自由度 $\boldsymbol{R}$ を含む量子力学系を考えよう．例えば，ゆっくり振動するイオンのポテンシャルのもとで運動する電子を想像してみよう．そのハミルトニアンは

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + v(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{R}) \tag{10.137}$$

で与えられる．ここでる．$\boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{P}$) は $\boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{R}$) の正準共役運動量である．第一近似として，遅い自由度はある値 $\boldsymbol{R}$ に '凍りついている' と考え，瞬間的な部分ハミルトニアン

$$h(\boldsymbol{R}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}; \boldsymbol{R}) \tag{10.138}$$

とその固有値問題

$$h(\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}\rangle = \varepsilon_n(\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}\rangle \tag{10.139}$$

を考えることができる．ここに，$|\boldsymbol{R}\rangle$ は n 番目の固有ベクトル $|n:\boldsymbol{R}\rangle$ を表す．固有値は孤立していて，縮退していないと仮定する．Berry の接続は $\mathcal{A}(\boldsymbol{R}) = \langle \boldsymbol{R}|\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle$ であり，その曲率は $\mathcal{F} = (\mathrm{d}\langle \boldsymbol{R}|) \wedge (\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle)$ である．

速い自由度がいかに遅い自由度に影響を与えるかを考察するのは興味深い．そこで，全波動関数が

$$\Psi(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R}) = \Phi(\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}\rangle \tag{10.140}$$

の形で書かれていると仮定し，遅い自由度の波動関数 $\Phi(\boldsymbol{R})$ が満たす‘有効な’Schrödinger 方程式を求める．ハミルトニアン (10.137) の固有値問題は

$$\begin{aligned}
H\Psi(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R}) &= -\frac{1}{2M}[\nabla^2_{\boldsymbol{R}}\Phi(\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}\rangle + 2\nabla_{\boldsymbol{R}}\Phi(\boldsymbol{R})\cdot\nabla_{\boldsymbol{R}}|\boldsymbol{R}\rangle + \Phi(\boldsymbol{R})\nabla^2_{\boldsymbol{R}}|\boldsymbol{R}\rangle] \\
&\quad -\Phi(\boldsymbol{R})\frac{1}{2m}\nabla^2_{\boldsymbol{r}}|\boldsymbol{R}\rangle + \Phi(\boldsymbol{R})V(\boldsymbol{r};\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}\rangle \\
&= E_n(\boldsymbol{R})\Phi(\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}\rangle
\end{aligned}$$

である．そこで、左から $\langle \boldsymbol{R}|$ を掛けて，Schrödinger 方程式 (10.139) を使うと，上の方程式は

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2M}[\nabla^2_{\boldsymbol{R}}\Phi(\boldsymbol{R}) + 2\nabla_{\boldsymbol{R}}\Phi(\boldsymbol{R})\cdot\langle \boldsymbol{R}|\nabla_{\boldsymbol{R}}|\boldsymbol{R}\rangle + \Phi(\boldsymbol{R})(\langle \boldsymbol{R}|\nabla_{\boldsymbol{R}}|\boldsymbol{R}\rangle)^2] \\
+\varepsilon_n(\boldsymbol{R})\Phi(\boldsymbol{R}) = E_n(\boldsymbol{R})\Phi(\boldsymbol{R})
\end{aligned} \tag{10.141}$$

となる．ただし，ここで Born-Oppenheimer 近似を用いたので，対角成分以外のすべての行列成分は無視されている；

$$\langle n;\boldsymbol{R}|\nabla_{\boldsymbol{R}}|n';\boldsymbol{R}\rangle = 0 \quad n' \neq n \tag{10.142}$$

さて，$|\Phi(\boldsymbol{R})\rangle$ に対する有効ハミルトニアンは

$$H_{\text{eff}}(n) \equiv -\frac{1}{2M}\left(\frac{\partial}{\partial R^\mu} + \mathcal{A}_\mu(\boldsymbol{R})\right)^2 + \varepsilon_n(\boldsymbol{R}) \tag{10.143}$$

で与えられる．ここで，$\mathcal{A}_\mu$ は Berry の接続

$$\mathcal{A}_\mu(\boldsymbol{R}) = \left\langle \boldsymbol{R}\left|\frac{\partial}{\partial R^\mu}\right|\boldsymbol{R}\right\rangle \tag{10.144}$$

の成分である．

速い自由度が，遅い自由度と結合するベクトル・ポテンシャルを誘導するは驚くべきことである．また，固有値 $\varepsilon_n(\boldsymbol{R})$ は，H_{eff} においてポテンシャル・エネルギーのごとくに振る舞うことに注意せよ．このゲージ対称性の‘自発的生成’は波動関数 $|\boldsymbol{R}\rangle$ の位相自由度を反映している．

断熱変化を記述する Schrödinger 方程式は

$$H(\boldsymbol{R}(t))|\boldsymbol{R}(t),t\rangle = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{R}(t),t\rangle \tag{10.145a}$$

である．ここに，$|\boldsymbol{R}(t),t\rangle$ は，明らかな t 依存性と同時に，$\boldsymbol{R}(t)$ を通した陰の t 依存性も持ち合わせていることに注意する．Berry はこの波動関数を

$$|\boldsymbol{R}(t),t\rangle = \exp\left(-\mathrm{i}\int_0^t E_n(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta(t)}|\boldsymbol{R}(t)\rangle \tag{10.146a}$$

と仮定した．ただし，$|\boldsymbol{R}\rangle$ は，$H(\boldsymbol{R})$ の規格化された瞬間的固有状態

$$H(\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}\rangle = E_n(\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}\rangle \quad \langle\boldsymbol{R}|\boldsymbol{R}\rangle = 1 \tag{10.147}$$

である．最初の指数関数は通常の力学的位相であり，後の位相が Berry の位相である．力学的位相を取り去るには，作用素

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{R}) \equiv H(\boldsymbol{R}) - E_n(\boldsymbol{R}) \tag{10.148}$$

を定義すると便利である．状態 $|\boldsymbol{R}\rangle$ は，$\mathcal{H}(\boldsymbol{R})$ のゼロエネルギー固有状態である；$\mathcal{H}(\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}\rangle = 0$．修正された Schrödinger 方程式

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{R})|\boldsymbol{R}(t),t\rangle = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{R}(t),t\rangle \tag{10.145b}$$

の解は

$$|\boldsymbol{R}(t),t\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta(t)}|\boldsymbol{R}(t)\rangle \tag{10.146b}$$

で与えられる．§1.7 で η は

$$\eta(t) = \mathrm{i}\int_0^t \mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}R^\mu}{\mathrm{d}t}\left\langle \boldsymbol{R}(t)\left|\frac{\partial}{\partial R^\mu}\right|\boldsymbol{R}(t)\right\rangle = \mathrm{i}\int_{\boldsymbol{R}(0)}^{\boldsymbol{R}(t)}\langle\boldsymbol{R}(t)|\mathrm{d}|\boldsymbol{R}(t)\rangle \tag{10.149}$$

で与えられることが示された

Berry の位相が $P(M,\mathrm{U}(1))$ 上の接続 (10.134) に伴うホロノミーであることを示そう．M のチャート U 上の切断 $\sigma(\boldsymbol{R}) = |\boldsymbol{R}\rangle$ をとる．$\boldsymbol{R}:[0,1]\to M$ を U におけるループとする．[多少大雑把な記号の使い方をしよう．] 接続 (10.134) に関する $\boldsymbol{R}(t)$ の水平もち上げを

$$\tilde{\boldsymbol{R}}(t) = \sigma(\boldsymbol{R}(t))g(\boldsymbol{R}(t)) \tag{10.150}$$

と書くことにする．ここで，$g(\boldsymbol{R}(0))$ を U(1) の単位元に選ぶ．群の元 $g(t)$ は (10.13b) を満たす；

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}g(t)^{-1} = -\mathcal{A}(\mathrm{d}/\mathrm{d}t) = -\left\langle\boldsymbol{R}(t)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|\boldsymbol{R}(t)\right\rangle \tag{10.151}$$

ここで，$g(t)$ は $g(\boldsymbol{R}(t))$ を表す．$g(t) = \exp(\mathrm{i}\eta(t))$ なので

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t} = -\left\langle\boldsymbol{R}(t)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|\boldsymbol{R}(t)\right\rangle$$

を得るが，これは簡単に積分され

$$\eta(1) = \mathrm{i}\int_0^1\left\langle\boldsymbol{R}(s)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|\boldsymbol{R}(s)\right\rangle\mathrm{d}s = \mathrm{i}\oint\langle\boldsymbol{R}|\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle \tag{10.152}$$

となる．$\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{R}(1)$ ゆえに，$|\boldsymbol{R}(0)\rangle = |\boldsymbol{R}(1)\rangle$ であることに注意しよう．このとき，$\exp[\mathrm{i}\eta(1)]$ はホロノミーと見なされる（図 10.7）；

$$\tilde{\boldsymbol{R}}(1) = \exp\left(-\oint\langle\boldsymbol{R}|\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle\right)\cdot|\boldsymbol{R}(0)\rangle \tag{10.153a}$$

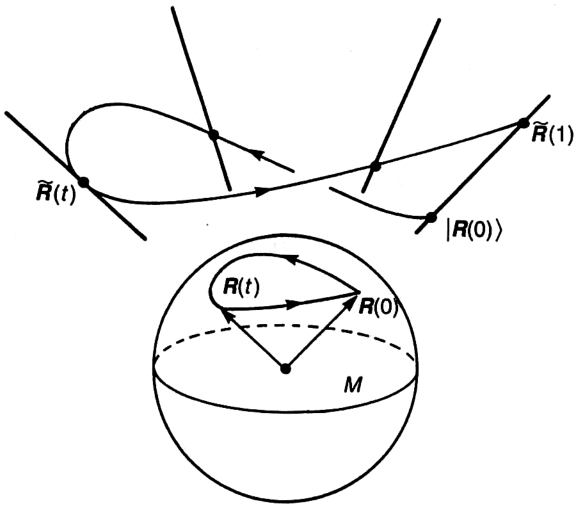


図 10.7. パラメタがループ $\boldsymbol{R}(t)$ に沿って断熱変化すると，初期条件 $|\boldsymbol{R}(0)\rangle$ をもつ状態は一般に $|\boldsymbol{R}(0)\rangle$ と異なる $|\tilde{\boldsymbol{R}}(1)\rangle$ になる．その差がホロノミーであり，Berry の位相と同一視される．

問 10.13 S を M における曲面で，ループ $\boldsymbol{R}(t)$ を境界にもつとする．このとき

$$\tilde{\boldsymbol{R}}(1) = \exp\left(-\oint_S \mathcal{F}\right) \cdot |\boldsymbol{R}(0)\rangle \tag{10.153b}$$

を示せ．ただし，$\mathcal{F}$ は (10.136) で与えられている．

例 10.8 ハミルトニアンが

$$H(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} R_3 & R_1 - \mathrm{i}R_2 \\ R_1 + \mathrm{i}R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \tag{10.154}$$

で与えられる，磁場中のスピン $\frac{1}{2}$ 粒子を考えよう．パラメタ $\boldsymbol{R}$ は外部磁場に対応する．これは固有値 $\pm|R|$ をとる 2-レベル系である．固有値 $R = +|\boldsymbol{R}|$ を考えよう．上での処方箋にしたがい，ハミルトニアン $\mathcal{H}(\boldsymbol{R}) \equiv H(\boldsymbol{R}) - |\boldsymbol{R}|$ を導入し，

$$|\boldsymbol{R}\rangle_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\sqrt{2R(R+R_3)}}\begin{pmatrix} R+R_3 \\ R_1 + \mathrm{i}R_2 \end{pmatrix} \tag{10.155}$$

で与えられる $\mathcal{H}(\boldsymbol{R})$ のゼロエネルギー固有値を考える．ゲージ・ポテンシャルは，直接的だが少々面倒な計算により

$$\mathcal{A}_{\mathrm{N}} = {}_{\mathrm{N}}\langle\boldsymbol{R}|\mathrm{d}|\boldsymbol{R}\rangle_{\mathrm{N}} = -\mathrm{i}\frac{R_2\mathrm{d}R_1 - R_1\mathrm{d}R_2}{2R(R+R_3)} \tag{10.156}$$

となる．場の強さについては

$$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{R_1\mathrm{d}R_2\wedge\mathrm{d}R_3 + R_2\mathrm{d}R_3\wedge\mathrm{d}R_1 + R_3\mathrm{d}R_1\wedge\mathrm{d}R_2}{R^3} \tag{10.157}$$

が得られる．

ここまで状態 $|\boldsymbol{R}\rangle$ は孤立していると仮定してきた．しかし，$\boldsymbol{R}=0$ では 2 つの固有状態が縮退するので，この仮定は破綻してしまう．驚いたことに，この特異点は $\boldsymbol{R}$-空間における磁気モノポールのごとくに振る舞うのである．これを確かめるために，つぎのように $\boldsymbol{R}$-空間における極座標 θ と ϕ を導入する

$$R_1 = R\sin\theta\cos\phi, \quad R_2 = R\sin\theta\sin\phi, \quad R_3 = R\cos\theta$$

すると，状態 (10.155) は

$$|\boldsymbol{R}\rangle_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \tag{10.158}$$

と表される．この状態は，$\theta=\pi$ において特異であり，$|\boldsymbol{R}\rangle_{\mathrm{N}}$ が $R_3=-R$ に対して定義されないことを反映している．そこで，同じ固有値をもつ別の固有ベクトル

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{R}\rangle_{\mathrm{S}} &\equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}|\boldsymbol{R}\rangle_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2R(R-R_3)}}\begin{pmatrix} R_1-\mathrm{i}R_2 \\ R-R_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を考える．この固有ベクトルは $\theta=0$ において，すなわち $R_3=R$ において特異である．これらのベクトルに対応して，極座標による Berry のゲージ・ポテンシャル

$$\mathcal{A}_{\mathrm{N}} = \frac{1}{2}\mathrm{i}(1-\cos\theta)\mathrm{d}\phi \quad \theta\neq\pi \tag{10.160a}$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}(1+\cos\theta)\mathrm{d}\phi \quad \theta\neq 0 \tag{10.160b}$$

を得る．これらはゲージ変換

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}} = \mathcal{A}_{\mathrm{N}} - \mathrm{i}\mathrm{d}\phi = \mathcal{A}_{\mathrm{N}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \tag{10.161}$$

で移り合うが，$g(\pi/2,\phi)=\exp(-\mathrm{i}\phi)$ は変換関数 t_{NS} と同一視される．方程式 (10.160) は単に，強さ $-\frac{1}{2}$ の Wu-Yang モノポールのベクトル・ポテンシャルである．§1.3 と §1.5 を参照．このモノポールの全フラックスは，$\Phi=4\pi(-\frac{1}{2})=-2\pi$ である．

現在の問題と磁気モノポールの間の類似は，いまはもう明らかであろう．磁場の大きさ R を固定すると，制限されたパラメタ空間は S^2 になる．S^2 の各点 $\boldsymbol{R}$ において，状態は位相の自由度をもつ．したがって，U(1) 束 $P(S^2,\mathrm{U}(1))$ を扱っていることになるが，これはまた磁気モノポールも記述する．パラメタ $\boldsymbol{R}$ をひとつ選ぶたびに,, n 番目の固有状態 $|n;\boldsymbol{R}\rangle$ に対応するファイバーを得る．$\boldsymbol{R}$ におけるファイバーは，(10.131) で与えられる同値類 $[|\boldsymbol{R}\rangle]$ からなる．射影 π は，ある状態をそれが定義されているパラメタに移す．すなわち，$\pi: e^{\mathrm{i}\alpha}|\boldsymbol{R}\rangle \to \boldsymbol{R}\in S^2$．上で考察したきたように，一つの接続だけでは記述できないので束は自明ではない．束の非自明性は原点におけるモノポールの存在を意味する．$\boldsymbol{R}=0$（すなわち，$\boldsymbol{B}=0$）は特異点であり，そこで固有値は縮退することに注意せよ．

つぎに，ホロノミーの問題に移ろう．S^2 上の基準点 $\boldsymbol{R}(0)$ をとり，ベクトル $|\boldsymbol{R}(0)\rangle$ を選ぶ．S^2 上のループ $\boldsymbol{R}(t)$ を選んで，このループに沿って $|\boldsymbol{R}(0)\rangle$ を平行移動させると，

戻ったときにベクトルは $\exp[\mathrm{i}\eta(1)]|\boldsymbol{R}\rangle$ となる．こうして得られる位相 η は，ホロノミー $\pi^{-1}(\boldsymbol{R}) \to \pi^{-1}(\boldsymbol{R})$ を表し，これは Berry の位相に対応する．(10.152) から，$\eta(1)$ は

$$\eta(1) = \mathrm{i} \oint_{\boldsymbol{R}} \mathcal{A} = \mathrm{i} \int_{S} \mathcal{F} \tag{10.162}$$

で与えられる．ここで，$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A}$ は場の強さであり，S はループ $\boldsymbol{R}(t)$ を境界にもつ曲面である．(10.162) から，Berry の位相 $\eta(1)$ は曲面 S を貫く‘磁気フラックス’を表すことが示される．

問 10.14 (10.159) を用いて

$$\mathcal{A}_{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{i}}{2} \frac{R_2 \mathrm{d}R_1 - R_1 \mathrm{d}R_2}{R(R - R_3)} \tag{10.163}$$

が成り立つことを示せ．また，

$$\mathrm{d}\phi = -\frac{R_2 \mathrm{d}R_1 - R_1 \mathrm{d}R_2}{(R + R_3)(R - R_3)} \tag{10.164}$$

も示せ．$\mathrm{d}\phi$ は $R_3 = \pm R$ において特異であることを確かめよ．

演習問題 10

1. 座標 $\boldsymbol{R}$ で表される 2 次元平面 M と，$\psi = \psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R})$ のように，$\boldsymbol{R}$ に断熱的に依存する波動関数 ψ を考える．$\boldsymbol{R} : [0,1] \to M$ を M におけるループとし，$\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}(1)) = -\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{R}(0))$ とする．これはループに沿った断熱変化のあと ψ の位相が π だけ変わると仮定することと等しい．このとき，ループ内に断熱的仮定が破綻する点が存在することを示せ．Longuest-Higgins (1975) を参照．

第 10 章への補足

本章で扱われた接続の理論は，次章で論ずるように特性類の理論と関連づけて議論するとき，その有効性が際だつ．そして特性類は，Atiyah-Singer の指数定理の定式化で基本的役割を果たすのである．Atiyah-Singer の指数定理の応用範囲は，物理学・幾何学・解析学へと及び実に広い．こうした観点から第 12 章の補足で，U(1) ゲージ理論である Seiberg-Witten 理論の概説を試みる．(以下特に断らない限り，向きづけ可能なカテゴリーで議論する.)

さて，ここでは物理学との関連という意味で，Einstein 多様体（Einstein 計量を許容する多様体）の微分位相幾何学の立場からの考察について触れる．主に論文

[KS] M. Kreck and S. Stolz, A diffeomorphism classification of 7-dimensional homogenous Einstein manifolds with SU(3)×SU(2)×U(1)-symmetry, Ann. of Math. **127** (1988), 373–388

の主結果の紹介が中心である．Einstein 計量とは，Riemann 計量のある定数倍が Ricci テンソルに等しくなるときをいう．Einstein 多様体上に異なる微分構造が存在するかどうか，という問題に対して最初に与えられた解答が上記論文である．論文のタイトルを訳せば，「SU(3) × SU(2) × U(1) 対称性をもつ 7 次元等質 Einstein 多様体の微分同相分類」となろう．タイトルにある群 $G = \mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ を一目すれば，数学者よりも物理学者の方がはるかに敏感に反応することだろう．この群 G は，素粒子論における "標準模型" のゲージ群に他ならない．

さて，コンパクト Lie 群 G に対して，M が G 対称性をもつとは，M 上にある Riemann 計量が存在して，等長変換 (isometry) 全体のなす群が G と同じ Lie 環をもつときをいう．G が推移的に作用すれば，M は等質空間になるので，そのとき M を G 対称性をもつ等質多様体という．

閉多様体が Einstein 計量をもつかどうかは，4 次元以外では今のところ何の障害も知られていないようである[2]．4 次元では計量の存在問題であるにも関わらず，位相的制限が発見されている：4 次元閉多様体 M^4 が Einstein 計量をもつならば，Euler 標数と符号数の間の不等式[3]

$$\chi(M^4) \geq \frac{3}{2}|\tau(M^4)| \tag{10.A}$$

を満たさなくてはならない．特に，等号が成り立つのは M が 4 次元トーラス $T^4 = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ であるか，その普遍被覆が K3 曲面[4]であるときに限る．この不等式は，Hitchin-Thorpe 不等式とよばれる．

4 次元 Einstein 多様体の例としては

$$S^4, S^2 \times S^2,\ \mathbb{C}P^2,\ \mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2},\ \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$$

などが知られている[5]（$\sharp$ は連結和を表す）．また，(10.A) が障害となって，Einstein 計量をもたない 4 次元多様体の例は

$$S^1 \times L(p,q) \sharp_n \mathbb{C}P^2\ (n \geq 0),\ T^4 \sharp T^4,\ \sharp_n \mathbb{C}P^2\ (n \geq 4)$$

などがある．ここで，$L(p,q)$ は (p,q) 型のレンズ空間である．

(10.A) を用いて，$M^4 = \mathbb{C}P^2 \sharp_n \overline{\mathbb{C}P^2}$ が Einstein 計量をもつとすると，$k \leq 8$ であることを示してみよう．まず，M^4 は単連結であるから $b_1(M^4) = 0$．Poincaré 双対定理より，$b_3(M^4) = 0$．また，Mayer-Vietoris 完全系列を用いて

$$H_2(M^4;\mathbb{Z}) \cong H_2(\mathbb{C}P^2) \oplus \underbrace{H_2(\overline{\mathbb{C}P^2}) \oplus \cdots \oplus H_2(\overline{\mathbb{C}P^2})}_{n\ \text{個の直和}} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{(n+1)\ \text{個の直和}}$$

だから，$b_2(M^4) = n+1$ である．したがって，$\chi(M^4) = 1 + 0 + (n+1) + 0 + 1 = n+3$ を得る．一方，符号数は連結和に関して，加法性があるから，$\tau(\mathbb{C}P^2) = 1$，$\tau(\overline{\mathbb{C}P^2}) = -1$

[2] ここで紹介する内容は，フランス (IHES) 滞在中の二木昭人氏より御教示いただいた．

[3] 4 次元多様体論には，この種の本質的な不等式がいくつか知られている．一般型代数曲面 S に対する "(Miyaoka-Yau 不等式)$c_1^2(S) \leq 3c_2(S)$" や単連結スピン多様体 M に対する "(Furuta 不等式)$b_2(M) \geq \frac{10}{8}\tau(M) + 2$" などが有名である．

[4] 第 I 分冊第 7 章の補足の最後に定義があるので，参照せよ．

[5] 非 Käler 多様体 $\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上の Einstein 計量の具体的構成は，物理学者 D. Page による．

に注意して，$\tau(M^4) = 1 - n$ を得る．すると，(10.A) より

$$n + 3 \geq \frac{3}{2}|1 - n| \qquad \text{よって}, n \leq 9$$

となる．特に，$n = 9$ のときは等号が成り立つが $\mathbb{C}P^2 \sharp_9 \overline{\mathbb{C}P^2}$ は 4 次元トーラスでも K3 曲面でもないので，Einstein 計量をもたない．$k \leq 8$ だからといって必ずしも Einstein 計量をもつとは限らない．例えば，$\mathbb{C}P^2 \sharp \overline{\mathbb{C}P^2} \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}$ 上に Einstein 計量が入るかどうかは未解決問題のようである．

高次元における Einstein 多様体のいくつかの族は，理論物理学者たちにより "Kaluza-Klein 理論" との関連で詳しく調べられている[6]．そのような例を与えよう．まず，$\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1$ 上の S^1 束の全空間となる 7 次元多様体 E を考える．E に同伴する D^2 束 W の構造群は $\mathrm{SO}(2) \cong U(1)$ だから，E は $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1$ 上の複素直線束から定まると考えられるので，その Chern 類（次章参照）が定義できる．

$$H^2(\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1; \mathbb{Z}) \cong H^2(\mathbb{C}P^2) \oplus H^2(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

だから，それぞれの生成元を α と β とすると，E の Chern 類は $c_1(E) = l\alpha + k\beta$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ とおける．k, l の値によって決まる 7 次元閉多様体を $M_{k,l}$ と表そう．[DNP, p. 64] によると，$\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ 対称性をもつ単連結 7 次元等質多様体は，$k, l \in \mathbb{Z}$ を互いに素となるように $M_{k,l}$ をとれば，すべて尽くされる．特に，$M_{k,l}$ はすべて Einstein 多様体である．

さて，[KS] の主結果はつぎの分類定理である：

定理 10.B M, N を単連結な 7 次元多様体で，$\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ 対称性をもつ等質多様体とする．M, N が微分同相であるための必要十分条件は，

$$w_2(M) = w_2(N), H^4(M; \mathbb{Z}) \cong H^4(N; \mathbb{Z}) \quad \text{かつ} \quad s_i(M) = s_i(N) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (i = 1, 2, 3)$$

が成り立つことである．さらに，同相類は同じ不変量で決定されるが，$s_1(M)$ を $\bar{s}_1(M) := 28 s_1(M) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ で置き換え[7]なければならない．

ここで，$w_2(X) \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ は X の第 2 Stiefel-Whitney 類（次章参照）であり，$s_i(X) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は定理の条件を満たす 7 次元多様体 X の 'ある微分同相不変量' である．その定義を述べる前に，二，三の準備が必要になる．

$(k, l) = 1$ のとき，$M_{k,l}$ が単連結であることは簡単にわかる[8]．さらにコホモロジー群は，Thom-Gysin 完全系列（前章の補足にある [田村, 第 9 章] を参照）を用いて

$$H^2(M_{k,l}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad H^3(M_{k,l}; \mathbb{Z}) = 0, \quad H^4(M_{k,l}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{l^2}$$

[6] [DNP] M. J. Duff, B. E. W. Nilsson and C. N. Pope, Kaluza-Klein supergravity, Physics Reports **130** (1986), 1–142.

[7] 28 という数字は，7 次元球面上の異なる微分構造の個数だったことを思い出していただきたい．第 5 章の補足または前章補足を参照．

[8] $k = l = 0$ であれば，S^1 束は自明になり，$M_{0,0} \cong \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1 \times S^1$ であり，$\pi_1(M_{0,0}) \cong \mathbb{Z}$ である．しかし，$(k, l) = 1$ のとき S^1 ファイバー上の非自明なループが $M_{k,l}$ の中では自明になる．正確には，ファイバー束のホモトピー完全系列を使うとわかることである．

となる．加えて，$u \in H^2(M_{k,l};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を生成元とすると，u^2 が $H^4(M_{k,l};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{l^2}$ を生成する．

7 次元多様体 $M_{k,l}$ を境界にもつ 8 次元多様体 W がいつでも存在[9]する．例えば，$M_{k,l}$ の同伴束である $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^1$ 上の D^2 束の全空間 $W_{k,l}$ がそうである．さらに，そのような W 上で，$u \in H^2(M_{k,l};\mathbb{Z})$ に対応するある元 $z \in H^2(W;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が存在して，

$$w_2(W) = d \pmod 2, \quad w_2(W) \in H^2(W;\mathbb{Z}_2)$$

を満たす．ただし，$M_{k,l}$ がスピン構造（第 11 章を参照）をもてば，$d=0$ であり，そうでなければ $d=z$ である．

W 上の複素直線束 ω で，$c_1(\omega)=z$ を満たすものをとる．このとき，$s_i(M) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を

$$\begin{aligned}
s_1(M) &:= \langle e^{\frac{d}{2}}\hat{A}(W), [W,\partial W]\rangle \pmod{\mathbb{Z}}\\
s_2(M) &:= \langle \mathrm{ch}(\omega-1)e^{\frac{d}{2}}\hat{A}(W), [W,\partial W]\rangle \pmod{\mathbb{Z}}\\
s_1(M) &:= \langle \mathrm{ch}(\omega^2-1)e^{\frac{d}{2}}\hat{A}(W), [W,\partial W]\rangle \pmod{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

と定義する．ここで，$\hat{A}$ は次章で登場する $\hat{A}$ 種数，ch は同じく次章で定義される Chern 指標，$[W,\partial W] \in H_8(W,\partial W;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ は対 $(W,\partial W)$ の相対ホモロジー群の一意に定まる基本ホモロジー類を表す．尚，定義には Kronecker 積を用いているが，次章の補足で特性数を紹介するところできちんと述べられる．この定義の鍵は，mod $\mathbb{Z}$ を取ることにより，各 s_i は生成元 u の選び方（すなわち，複素直線束の選び方）や特に境界付 8 次元多様体 W の選び方によらずに定まり，$M_{k,l}$ の微分同相不変量を与えているということである．これらの不変量は，第 12 章の最後で考察する Atiyah-Patodi-Singer の指数定理と密接に関係している．各 s_i は mod $\mathbb{Z}$ のもとで，M^7 上の自己随伴作用素の η 不変量と Pontrjagin 形式を伴うある微分形式の M^7 上の積分の有理係数一次結合で表される（[KS, Proposition 2.1]).

したがって，あとは $M_{k,l}$ を境界にもつ $W_{k,l}$ に対してこれらの不変量の具体的計算を実行すればよい．計算の結果，定理 10.B からつぎのような分類が得られている．

定理 10.C([KS])　$(k,l)=1=(\tilde{k},\tilde{l})$ とする．

(i)　$M_{k,l}$ と $M_{\tilde{k},\tilde{l}}$ が <u>同相</u> であるための必要十分条件は，

$$\tilde{l} = \pm l \quad \text{かつ} \quad \tilde{k} = k \pmod{a_l \cdot l^2}$$

が成り立つことである．ここで，$a_l = 1$ ($l \equiv 2 \pmod 4$ のとき)，2 ($l \not\equiv 2 \pmod 4$ のとき) である．

(ii)　$M_{k,l}$ と $M_{\tilde{k},\tilde{l}}$ が <u>微分同相</u> であるための必要十分条件は，

$$\tilde{l} = \pm l \quad \text{かつ} \quad \tilde{k} = k \pmod{2^{\lambda_2(l)}7^{\lambda_7(l)}l^2}$$

が成り立つことである．ここで，

$$\lambda_2(l) \equiv \begin{cases} 0 & (l \equiv 2,6 \pmod 8)\\ 1 & (l \equiv 1,7 \pmod 8)\\ 2 & (l \equiv 3,5 \pmod 8)\\ 3 & (l \equiv 0,4 \pmod 8)\end{cases}$$

[9] 次章の補足で触れる "コボルディズム群" の計算からわかる事実で，$\Omega_7^{SO}=0$ の帰結．

$$\lambda_7(l) \equiv \begin{cases} 0 & (l \equiv 1, 2, 5, 6 \pmod 7) \\ 1 & (l \equiv 0, 3, 4 \pmod 7) \end{cases}$$

である．

こうして，"7次元 Einstein 多様体で，28個の異なる微分構造をもつものが存在する" ことがわかった．(演習：定理 10.C からこの事実を確かめよ．)

これらの議論の詳細を読者が満足いくまで解説しようとするには，この補足では狭すぎる．是非とも，原論文 [KS] の読破に挑戦されたい．

第11章　特性類

ファイバーF，構造群G，底空間Mがあたえられると，変換関数の選び方に従ってM上にさまざまなファイバー束が構成される．そこで自然に起こる問いは，あたえられたFとGに対して，M上のファイバー束はどのくらいたくさん存在し，それらが自明束$M \times F$とどの程度異なるかであろう．例えば，§10.5ではS^4上のSU(2)束はホモトピー群$\pi(\mathrm{SU}(2)) \cong \mathbb{Z}$で分類されることを確かめた．整数$n \in \mathbb{Z}$は，ファイバー束の局所的部分が変換関数により貼り合わされるときの捻れ具合をあらわすのであった．またこのホモトピー群は，S^4上$\mathrm{tr}\mathcal{F}^2 \in H^4(S^4)$を積分することによって求められることも考察した．定理10.7を参照．

特性類は底空間のコホモロジー類の部分集合であり，ファイバー束の捩れ具合あるいは非自明さを測るものである．この意味で特性類はファイバー束が自明束になるための障害と考えることもできる．特性類のほとんどはde Rhamコホモロジー類によってあたえられる．特性類は，ファイバー束の分類における重要性に加えて，指数定理においても中心的役割を果たすのである．

ここではAlvarez-Gaumé & Ginsparg (1984)，Eguchi他(1980)，Gilkey (1984)，Wells (1980)などの議論に従う．

11.1　不変多項式とChern-Weil準同型

ここでde Rhamコホモロジー群の簡単なおさらいをしよう（詳細は第6章を参照）．Mをm次元多様体とする．r-形式$\omega \in \Omega^r(M)$が$\mathrm{d}\omega = 0$を満たすとき，ωは閉であるといい，ある$\eta \in \Omega^{r-1}(M)$に対して$\omega = \mathrm{d}\eta$を満たすとき，完全であるという．閉r-形式全体の集合を$Z^r(M)$，完全r-形式全体の集合を$B^r(M)$と表す．$\mathrm{d}^2 = 0$が成り立つので，$Z^r(M) \supset B^r(M)$である．そこで，r次de Rhamコホモロジー群$H^r(M)$を

$$H^r(M) \equiv Z^r(M)/B^r(M)$$

によって定義する．$H^r(M)$において，二つのr-形式ω_1とω_2は，ある$\eta \in \Omega^{r-1}(M)$に対して$\omega_1 - \omega_2 = \mathrm{d}\eta$を満たすとき，同一視される．$M$を$m$次元多様体とする．形式的直和

$$H^*(M) \equiv H^0(M) + H^1(M) + \ldots + H^m(M)$$

は，外積$\wedge : H^p(M) \times H^q(M) \to H^{p+q}(M)$から誘導される$\wedge : H^*(M) \times H^*(M) \to H^*(M)$を積とするコホモロジー環である．$f : M \to N$を多様体の間の滑らかな写像とする．引き戻し$f^* : \Omega^r(N) \to \Omega^r(M)$は，$f^*$と外積の可換性，$f^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f^*\omega$，から自然に線形写像$f^* : H^r(N) \to H^r(M)$を誘導する．また，$f^*$は$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$が成り立つのでコホモロジー環の代数構造を保つ．

11.1.1 不変多項式

$M(k,\mathbb{C})$ を複素 $k \times k$ 行列全体の集合とする．$S^r(M(k,\mathbb{C}))$ を $M(k,\mathbb{C})$ 上の r 次対称複素線形関数 全体の集合とする．すなわち，写像

$$\tilde{P} : \bigotimes^{r} M(k,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$

は，各成分に関して線形であるのに加えて，対称性

$$\tilde{P}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_r) = \tilde{P}(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_r) \qquad 1 \le i, j \le r \tag{11.1}$$

をもつとき，$S^r(M(k,\mathbb{C}))$ の元となる．

$$S^*(M(k,\mathbb{C})) \equiv \bigoplus_{r=0}^{\infty} S^r(M(k,\mathbb{C}))$$

で対称多重線形複素関数の形式和を表す．$\tilde{P} \in S^p(M(k,\mathbb{C}))$ と $\tilde{Q} \in S^q(M(k,\mathbb{C}))$ の積を

$$\tilde{P}\tilde{Q}(X_1, \ldots, X_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_P \tilde{P}(X_{P(1)}, \ldots, X_{P(p)}) \tilde{Q}(X_{P(p+1)}, \ldots, X_{P(p+q)}) \tag{11.2}$$

によって定義する．ここで P は $(1, \ldots, p+q)$ の置換である．$S^*(M(k,\mathbb{C}))$ はこの積により多元環になる．

G を行列群とし，$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする．実際には，$G = \mathrm{GL}(k,\mathbb{C}), \mathrm{U}(k), \mathrm{SU}(k)$ をとる．Lie 環 $\mathfrak{g}$ は $M(k,\mathbb{C})$ の部分空間であるから，制限 $S^r(\mathfrak{g})$ や $S^*(\mathfrak{g}) \equiv \bigoplus_{r\ge0} S^r(\mathfrak{g})$ を考えることができる．$\tilde{P} \in S^r(\mathfrak{g})$ は，任意の $g \in G$ と $A_i \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\tilde{P}(\mathrm{Ad}_g A_1, \ldots, \mathrm{Ad}_g A_r) = \tilde{P}(A_1, \ldots, A_r) (11.3)$$

を満たすとき，不変であるという．ここで，$\mathrm{Ad_g} A_i = \mathrm{g}^{-1} A_i \mathrm{g}$ である．例えば，

$$\tilde{P}(A_1, A_2, \ldots, A_r) = \mathrm{str}(A_1, A_2, \ldots, A_r) \equiv \frac{1}{r!} \sum_P \mathrm{tr}(A_{P(1)}, A_{P(2)}, \ldots, A_{P(r)}) \tag{11.4}$$

は対称，r 次線形でかつ不変である．ここで ‘str’ は対称トレースを表し，最後の等式が定義である．$S^r(\mathfrak{g})$ の G 不変なもの全体を $I^r(G)$ で表そう．$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$ が必然的に $I^r(G_1) = I^r(G_2)$ を意味するわけではないことに注意せよ．(11.2) で定義される積は自然に乗法

$$I^p(G) \otimes I^q(G) \to I^{p+q}(G) \tag{11.5}$$

を誘導する．直和 $I^*(G) \equiv \bigotimes_{r\ge0} I^r(G)$ はこの積で多元環になる．

$\tilde{P} \in I^r(G)$ をとる．すべての変数が等しい時，それを簡単に

$$P(A) \equiv \tilde{P}(\underbrace{A, A, \ldots, A}_{r}) \quad A \in \mathfrak{g} \tag{11.6}$$

とかく．明らかに，P は次数 r の多項式である．P を**不変多項式**という．P は，また $\mathrm{Ad}\, G$ 不変でもある．

$$P(\mathrm{Ad}_g A) = P(g^{-1}Ag) = P(A) \quad A \in \mathfrak{g},\ g \in G \tag{11.7}$$

例えば，$\mathrm{tr}(A^r)$ は (11.4) から得られる不変多項式である．一般に，不変多項式は $P_r \equiv \mathrm{tr}(A^r)$ の積の和により表されるとしてよい．

逆に，任意の不変多項式 P は，$P(t_1A_1 + \cdots + t_rA_r)$ を t_i の多項式として展開することにより，不変な対称 r 次線形形式 $\tilde{P}$ を定める．$t_1t_2\cdots t_r$ の係数の $1/r!$ 倍は，不変かつ対称であり，P の**極化**とよばれる．例えば，$P(A) \equiv \mathrm{tr}(A^3)$ をとる．上の規定にしたがって，$\mathrm{tr}(t_1A_1 + t_2A_2 + t_3A_3)^3$ を t_1, t_2, t_3 のベキで展開する．$t_1t_2t_3$ の係数は

$$\mathrm{tr}(A_1A_2A_3 + A_1A_3A_2 + A_2A_1A_3 + A_2A_3A_1 + A_3A_1A_2 + A_3A_2A_1)$$

$$= 3\ \mathrm{tr}(A_1A_2A_3 + A_2A_1A_3)$$

である．ここでトレースの巡回性を用いた．極化は

$$\tilde{P}(A_1, A_2, A_3) = \frac{1}{2}\ \mathrm{tr}(A_1A_2A_3 + A_2A_1A_3) = \mathrm{str}(A_1, A_2, A_3)$$

である．

前章では主束上において局所ゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu \mathrm{d}x^\mu$ と場の強さ $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ を導入した．そしてこれらの幾何学的対象が同伴ベクトル束をも記述することを示した．接続 $\{\mathcal{A}_i\}$ の集合はファイバー束の捻れ具合を記述するので，主束の非自明性は同伴束のそれと同等である．実際，(10.57) をベクトル束における局所接続の定義に採用するならば，そもそもそれが同伴していた主束を持ち出さなくても定義されうる．後にベクトル束を用いることが本質的となる状況に出くわすことになる．

$P(M, G)$ を主束とする．不変多項式の定義域を，$\mathfrak{g}$ から M 上の $\mathfrak{g}$ 値 p-形式へ拡張しよう．$A_i\eta_i$ $(A_i \in \mathfrak{g}, \eta \in \Omega^{p_i}(M); 1 \le i \le r)$ に対して，

$$\tilde{P}(A_1\eta_1, \ldots, A_r\eta_r) \equiv \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r \tilde{P}(A_1, \ldots, A_r) \tag{11.8}$$

を定義する．例えば，(11.4) に対応して

$$\mathrm{str}(A_1\eta_1, \ldots, A_r\eta_r) = \eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_r \mathrm{str}(A_1, \ldots, A_r)$$

を得る．すべての変数が等しいときは

$$P(A\eta) \equiv \underbrace{\eta \wedge \ldots \wedge \eta}_{r} P(A) \tag{11.9}$$

である．$\tilde{P}$ あるいは P の一般の元への作用素は r 次線形性によって与えられる．以下では特に $P(\mathcal{F})$ の形をした不変多項式が興味の中心となる．不変多項式の重要性は，つぎの基本定理にある．

定理 11.1 (Chern-Weil) P を不変多項式とする．このとき，$P(\mathcal{F})$ はつぎを満たす：

(*a*) $\mathrm{d}P(\mathcal{F})=0$

(*b*) $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ を E 上の異なる接続 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ の曲率 2-形式とする．このとき，差 $P(\mathcal{F}')-P(\mathcal{F})$ は完全である．

証明：

(*a*) 任意の不変多項式は斉次多項式に分解できるので，r 次の斉次不変多項式 $P_r(\mathcal{F})$ に対して，$\mathrm{d}P(\mathcal{F})=0$ を証明すれば十分である．最初に，等式

$$\tilde{P}_r(g_t^{-1}X_1g_t,\dots,g_t^{-1}X_rg_t)=\tilde{P}_r(X_1,\dots,X_r)$$

を考える．ここで $\mathrm{g}_t\equiv\exp(tX)$ であり，$X,X_i\in\mathfrak{g}$ である．t に関して微分して $t=0$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{r}\tilde{P}_r(X_1,\dots,[X_i,X],\dots,X_r)=0 \tag{11.10}$$

となる．つぎに A を $\mathfrak{g}$ 値 p-形式，Ω_i を $\mathfrak{g}$ 値 p_i-形式 $(1\le i\le r)$ とする．$A=X\eta$, $\Omega_i=X_i\eta_i$ としても一般性を失わない．ただし $X,X_i\in\mathfrak{g}$ であり，$\eta\ (\eta_i)$ は p-形式（p_i-形式）である．そこで

$$\begin{aligned}[\Omega_i,A]&\equiv\eta_i\wedge\eta[X_i,X]\\&=X_iX(\eta_i\wedge\eta)-(-1)^{pp_i}XX_i(\eta\wedge\eta_i)\end{aligned} \tag{11.11}$$

と定義する．このとき

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_r(\Omega_1,\dots,[\Omega_i,A],\dots,\Omega_r)\\&=\ \eta_1\wedge\dots\wedge\eta_i\wedge\eta\wedge\dots\wedge\eta_r\tilde{P}_r(X_1,\dots,X_iX,\dots,X_r)\\&\quad-(-1)^{p\cdot p_i}\eta_1\wedge\dots\wedge\eta\wedge\eta_i\wedge\dots\wedge\eta_r\tilde{P}_r(X_1,\dots,XX_i,\dots,X_r)\\&=\ \eta\wedge\eta_1\wedge\dots\wedge\eta_r(-1)^{p(p_1+\dots+p_i)}\tilde{P}_r(X_1,\dots,[X_i,X],\dots,X_r)\end{aligned}$$

であることに注意しよう．このことと (11.10) より

$$\sum_{i=1}^{r}(-1)^{p(p_1+\dots+p_i)}\tilde{P}_r(\Omega_1,\dots,[\Omega_i,A],\dots,\Omega_r)=0 \tag{11.12}$$

となる．つぎに微分

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{P}_r(\Omega_1,\dots,\Omega_r)&=\mathrm{d}(\eta_1\wedge\dots\wedge\eta_r)\tilde{P}_r(X_1,\dots,X_r)\\&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{(p_1+\dots+p_{i-1})}(\eta_1\wedge\dots\wedge\mathrm{d}\eta_i\wedge\dots\wedge\eta_r)\\&\qquad\times\tilde{P}_r(X_1,\dots,X_i,\dots,X_r)\\&=\sum_{i=1}^{r}(-1)^{(p_1+\dots+p_{i-1})}\tilde{P}_r(\Omega_1,\dots,\mathrm{d}\Omega_i,\dots,\Omega_r)\end{aligned} \tag{11.13}$$

を考える．(11.12) と (11.13) において $A = \mathcal{A}, \Omega_i = \mathcal{F}$ とすると $p = 1, p_i = 2$ である．(11.13) 式に (11.12) の左辺 $(= 0)$ を加えると，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\tilde{P}_r(\mathcal{F}, \ldots, \mathcal{F}) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{r}[\tilde{P}_r(\mathcal{F}, \ldots, \mathrm{d}\mathcal{F}, \ldots, \mathcal{F}) + \tilde{P}_r(\mathcal{F}, \ldots, [\mathcal{A}, \mathcal{F}], \ldots, \mathcal{F})] \\
&\quad = \sum_{i=1}^{r} \tilde{P}_r(\mathcal{F}, \ldots, \mathcal{D}\mathcal{F}, \ldots, \mathcal{F}) = 0
\end{aligned} \tag{11.14}
$$

が得られる．最後の等式を得るために，Bianchi 恒等式 $\mathcal{D}\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{F} + [\mathcal{A}, \mathcal{F}] = 0$ を用いた．したがって

$$
\mathrm{d}\tilde{P}_r(\mathcal{F}) = \mathrm{d}\tilde{P}_r(\mathcal{F}, \ldots, \mathcal{F}) = 0
$$

が証明できた．

(*b*) $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}'$ を E 上の二つの接続とし，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}'$ を対応する場の強さとする．ゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A}_t$ を

$$
\mathcal{A}_t \equiv \mathcal{A} + t\theta \qquad \theta \equiv (\mathcal{A}' - \mathcal{A}), 0 \le t \le 1 \tag{11.15}
$$

と定める．$\mathcal{A}_t$ は $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$ と $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_1$ を補間する．これに対応する場の強さは

$$
\mathcal{F}_t \equiv \mathrm{d}\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t \wedge \mathcal{A}_t = \mathcal{F} + t\mathcal{D}\theta + t^2\theta^2 \tag{11.16}
$$

であるが，ここで $\mathcal{D}\theta = \mathrm{d}\theta + [\mathcal{A}, \theta] = \mathrm{d}\theta + \mathcal{A} \wedge \theta + \theta \wedge \mathcal{A}$ である．最初に

$$
\begin{aligned}
P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F}) = P_r(\mathcal{F}_1) - P_r(\mathcal{F}_0) &= \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_r(\mathcal{F}_t) \\
&= r\int_0^1 \mathrm{d}t \tilde{P}_r\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t\right)
\end{aligned} \tag{11.17}
$$

に注意する．(11.16) から

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_r(\mathcal{F}_t) &= r\tilde{P}_r(\mathcal{D}\theta + 2t\theta^2, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \\
&= r\tilde{P}_r(\mathcal{D}\theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) + 2rt\tilde{P}_r(\theta^2, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t)
\end{aligned} \tag{11.18}
$$

となる．一方，

$$
\mathcal{D}\mathcal{F}_t = \mathrm{d}\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t] = -[\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] + [\mathcal{A}, \mathcal{F}_t] = t[\mathcal{F}_t, \theta]
$$

を得る．ここで Bianchi 恒等式 $\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t = \mathrm{d}\mathcal{F}_t + [\mathcal{A}_t, \mathcal{F}_t] = 0$ を用いた．[$\mathcal{D}$ は $\mathcal{A}$ に関する共変微分であり，$\mathcal{D}_t$ は $\mathcal{A}_t$ に関する共変微分である．] したがって

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}[\tilde{P}_r(\theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t)] \\
&\quad = \tilde{P}_r(\mathrm{d}\theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) - (r-1)\tilde{P}_r(\theta, \mathrm{d}\mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \\
&\quad = \tilde{P}_r(\mathcal{D}\theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) - (r-1)\tilde{P}_r(\theta, \mathcal{D}\mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t)
\end{aligned}
$$

$$= \tilde{P}_r(\mathcal{D}\theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) - (r-1)t\tilde{P}_r(\theta, [\mathcal{F}_t, \theta], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \tag{11.19}$$

が得られる．ここで，d を $\mathcal{D}$ に変えるために (11.12) の左辺 $= 0$ を加えた．(11.12) で，$\Omega_1 = A = \theta, \Omega_2 = \cdots = \Omega_m = \mathcal{F}_t$ ととると

$$2\tilde{P}_r(\theta^2, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) + (r-1)\tilde{P}_r(\theta, [\mathcal{F}_t, \theta], \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) = 0$$

を得る．(11.18), (11.19) と上の等式から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_r(\mathcal{F}_t) = r\mathrm{d}[\tilde{P}_r(\theta, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t)]$$

が得られ，結局

$$P_r(\mathcal{F}') - P_r(\mathcal{F}) = \mathrm{d}\left(r\int_0^1 \tilde{P}_r(\mathcal{A}' - \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t)\mathrm{d}t\right) \tag{11.20}$$

が示された．これは $P_r(\mathcal{F}')$ が完全形式の分だけ $P_r(\mathcal{F})$ と異なることを示している．

∎

さて，P_r の**転入** $TP_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ を

$$TP_r(\mathcal{A}', \mathcal{A}) \equiv r\int_0^1 \mathrm{d}t\tilde{P}_r(\mathcal{A}' - \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, \ldots, \mathcal{F}_t) \tag{11.21}$$

で定義する．ここで $\tilde{P}_r$ は P_r の極化である．転入の概念は，§ 11.5 で Chern-Simons 形式を論ずる際に重要な役割を果たすことになる．$\dim M = m$ とする．$P_m(\mathcal{F}')$ は $P(\mathcal{F})$ と完全形式の分異なるだけなので，境界をもたない多様体 M 上での積分は一致する:

$$\int_M P_m(\mathcal{F}') - \int_M P_m(\mathcal{F}) = \int_M \mathrm{d}TP_m(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = \int_{\partial M} TP_m(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = 0 \tag{11.22}$$

すでに証明したように，不変多項式は閉形式で，一般に自明ではない．したがって，M のあるコホモロジー類を定める．定理 11.1 (*b*) は，このコホモロジー類がゲージ・ポテンシャルの選び方にはよらないことを示している．こうして定まるコホモロジー類は，**特性類**とよばれる．不変多項式 P によって定義される特性類を $\chi_E(P)$ で表す．ただし E は，接続と曲率が定義されているファイバー束である．[注：主束とその同伴束は同じゲージ・ポテンシャルと場の強さをもつので，上の Chern-Weil の定理はどちらの束に対しても等しく適用される．したがって，E は主束，ベクトル束どちらであってもよい．]

定理 11.2 P を $I^*(G)$ における不変多項式で，E を構造群 G の M 上のファイバー束とする．

(*a*) $P \to \chi_E(P)$ によって定義される写像

$$\chi_E : I^*(G) \to H^*(M) \tag{11.23}$$

は準同型（**Weil 準同型**）写像である．

(*b*) $f : N \to M$ を可微分写像とする．E の引き戻し束 f^*E に対して，いわゆる**自然性**

$$\chi_{f^*E} = f^*\chi_E \tag{11.24}$$

が成り立つ．

証明：

(*a*) $P_r \in I_r(G), P_s \in I_s(G)$ をとる．$\mathcal{F} = \mathcal{F}^\alpha T_\alpha$ とかけば，

$$\begin{aligned}(P_rP_s)(\mathcal{F}) &= \mathcal{F}^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}^{\alpha_r} \wedge \mathcal{F}^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge \mathcal{F}^{\beta_s} \\ &\quad \times \frac{1}{(r+s)!}\tilde{P}_r(T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_r})\tilde{P}_n(T_{\beta_1}, \ldots, T_{\beta_s}) \\ &= P_r(\mathcal{F}) \wedge P_s(\mathcal{F})\end{aligned}$$

を得る．$P_r(\mathcal{F}), P_s(\mathcal{F}) \in H^*(M)$ なので，(*a*) が成り立つ．

(*b*) $\mathcal{A}$ を E のゲージ・ポテンシャル，$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$ とする．容易に確かめられるように，引き戻し $f^*\mathcal{A}$ は f^*E 上の接続である．実際，$\mathcal{A}_i$ と $\mathcal{A}_j$ を，共通部分をもつ M のチャート U_i と U_j における局所接続とする．t_{ij} が $U_i \cap U_j$ 上の変換関数ならば，f^*E 上の変換関数は $f^*t_{ij} = t_{ij} \cdot f$ で与えられる．引き戻し $f^*\mathcal{A}_i$ と $f^*\mathcal{A}_j$ は

$$\begin{aligned}f^*\mathcal{A}_j &= f^*(t_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}\mathrm{d}t_{ij}) \\ &= (f^*t_{ij}^{-1})(f^*\mathcal{A}_i)(f^*t_{ij}) + (f^*t_{ij}^{-1})(\mathrm{d}f^*t_{ij})\end{aligned}$$

によって結ばれている．これは，$f^*\mathcal{A}$ が実際 f^*E 上の局所接続であることを示している．f^*E 上の対応する場の強さは

$$\mathrm{d}(f^*\mathcal{A}_i) + f^*\mathcal{A}_i \wedge f^*\mathcal{A}_i = f^*[\mathrm{d}\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i \wedge \mathcal{A}_i] = f^*\mathcal{F}_i$$

である．ゆえに，$f^*P(\mathcal{F}_i) = P(f^*\mathcal{F}_i)$ ，すなわち $f^*\chi_E(P) = \chi_{f^*E}(P)$ である．∎

系 11.1 自明束の特性類は，自明である．

証明： $F \xrightarrow{\pi} M$ を自明束とする．このとき，写像 $f : M \to \{p\}$ が存在して，一点 p 上の束 $E \xrightarrow{\pi'} \{p\}$ に対して $F = f^*E$ となる．一点上のすべての de Rham コホモロジー群は自明であるから，特性類も自明である．よって，定理 11.2 (*b*) より F の特性類 χ_F $(= f^*\chi_E)$ も自明である．

11.2 Chern 類

11.2.1 諸定義

$E \xrightarrow{\pi} M$ をファイバーが $\mathbb{C}^k$ の複素ベクトル束とする．構造群 G は $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ の部分群であり，ゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A}$ と場の強さ $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{g}$ に値をもつ．そこで，**全 Chern 類**を

$$c(\mathcal{F}) \equiv \det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right) \tag{11.25}$$

によって定義する．$\mathcal{F}$ は 2-形式なので，$c(\mathcal{F})$ は偶数次微分形式の形式和

$$c(\mathcal{F}) = 1 + c_1(\mathcal{F}) + c_2(\mathcal{F}) + \dots \tag{11.26}$$

である．ここで，$c_j(\mathcal{F}) \in \Omega^{2j}(M)$ は j 次 **Chern 類**とよばれる．m 次元多様体 M において，$2j > m$ である Chern 類 $c_j(\mathcal{F})$ は明らかにゼロである．$\dim M$ に関わりなく，級数は $c_k(\mathcal{F}) = \det(\mathrm{i}\mathcal{F}/2\pi)$ が最終項で，$j > k$ に対して $c_j(\mathcal{F}) = 0$ である．$c_j(\mathcal{F})$ は閉形式なので，$H^{2j}(M)$ の元 $[c_j(\mathcal{F})]$ を定める．

例 11.1 E を M 上のファイバー $\mathbb{C}^2$ をもつ複素ベクトル束で，$G = \mathrm{SU}(2)$ かつ $\dim M = 4$ とする．場の強さを $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\alpha(\sigma_\alpha/2\mathrm{i})$, $\mathcal{F}^\alpha = \frac{1}{2}\mathcal{F}^\alpha{}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ と書くと

$$\begin{aligned} c(\mathcal{F}) &= \det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathcal{F}^\alpha(\sigma_\alpha/2\mathrm{i})\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 + (\mathrm{i}/2\pi)(\mathcal{F}^3/2\mathrm{i}) & (\mathrm{i}/2\pi)(\mathcal{F}^1 - \mathrm{i}\mathcal{F}^2)/2\mathrm{i} \\ (\mathrm{i}/2\pi)(\mathcal{F}^1 + \mathrm{i}\mathcal{F}^2)/2\mathrm{i} & 1 - (\mathrm{i}/2\pi)(\mathcal{F}^3/2\mathrm{i}) \end{pmatrix} \\ &= 1 + \frac{1}{4}(\mathrm{i}/2\pi)^2(\mathcal{F}^3 \wedge \mathcal{F}^3 + \mathcal{F}^1 \wedge \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2 \wedge \mathcal{F}^2) \end{aligned} \tag{11.27}$$

を得る．個々の Chern 類は

$$c_0(\mathcal{F}) = 1 \tag{11.28a}$$

$$c_1(\mathcal{F}) = 0 \tag{11.28b}$$

$$c_2(\mathcal{F}) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2 \sum \frac{\mathcal{F}^\alpha \wedge \mathcal{F}^\alpha}{4} = \det\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right) \tag{11.28c}$$

となる．これより高次の Chern 類は恒等的に 0 となる．

一般のファイバー束に関しては，行列式の展開によって Chern 類を計算するのは結構やっかいであり，もっと簡単に計算できる公式を求めることが望まれる．これは，曲率形式を対角化することにより可能となる．$\mathcal{F}$ を適当な行列 $g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ により $g^{-1}(\mathrm{i}\mathcal{F}/2\pi)g = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_k)$ と対角化する．ここに x_i は 2-形式である．例えば，$G = \mathrm{SU}(k)$ ならば生成元は反 Hermite に選ぶことができ，Hermite 行列 $\mathrm{i}\mathcal{F}/2\pi$ は，$g \in \mathrm{SU}(k)$ によって対角化可能である．すると

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{1} + A) &= \det[\mathrm{diag}(1 + x_1, 1 + x_2, \dots, 1 + x_k)] \\ &= \prod_{j=1}^{k}(1 + x_j) \\ &= 1 + (x_1 + \dots + x_k) + (x_1x_2 + \dots + x_{k-1}x_k) \\ &\qquad + \dots + (x_1x_2 + \dots + x_k) \\ &= 1 + \mathrm{tr}A + \frac{1}{2}\left\{(\mathrm{tr}A)^2 - \mathrm{tr}A^2\right\} + \dots + \det A \end{aligned} \tag{11.29}$$

を得る．(11.29) の各項は，以下で定義される $\{x_j\}$ の基本対称式 $S_i(x_j)$ であることを確かめよ；

$$S_0(x_j) \equiv 1 \tag{11.30a}$$

$$S_1(x_j) \equiv \sum_{j=1}^{k} x_j \tag{11.30b}$$

$$S_2(x_j) \equiv \sum_{i<j} x_i x_j \tag{11.30c}$$

$$\vdots$$

$$S_k(x_j) \equiv x_1 x_2 \dots x_k \tag{11.30d}$$

$\det(\mathbf{1}+A)$ は不変多項式なので，$P(\mathcal{F}) = P(\mathrm{g}\mathcal{F}\mathrm{g}^{-1}) = P(2\pi A/\mathrm{i})$ を得る．(11.7) を参照．したがって，一般の $\mathcal{F}$ に対して

$$c_0(\mathcal{F}) = 1 \tag{11.31a}$$

$$c_1(\mathcal{F}) = \mathrm{tr}A = \mathrm{tr}\left(g\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}g^{-1}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathrm{tr}\mathcal{F} \tag{11.31b}$$

$$\begin{aligned} c_2(\mathcal{F}) &= \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\mathcal{A})^2 - \mathrm{tr}\mathcal{A}^2] \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{i}/2\pi)^2[\mathrm{tr}\mathcal{F}\wedge\mathrm{tr}\mathcal{F} - \mathrm{tr}(\mathcal{F}\wedge\mathcal{F})] \end{aligned} \tag{11.31c}$$

$$\vdots$$

$$c_k(\mathcal{F}) = \det A = (\mathrm{i}/2\pi)^k \det\mathcal{F} \tag{11.31d}$$

を得る．こうして，例 11.1 は (11.31) から容易に確かめられる．[Pauli 行列（一般に，$\mathrm{SU}(n)$ の Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の元）はトレースが消える，$\mathrm{tr}\sigma_\alpha = 0$.]

11.2.2 Chern 類の性質

つぎに複数のベクトル束を扱う．ベクトル束 E の Chern 類をしばしば $c(E)$ で表すことがある．曲率を特定する必要があるときには，$c(\mathcal{F}_E)$ と書くことにする．

定理 11.3 $E \xrightarrow{\pi} M$ を $G = \mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$, $F = \mathbb{C}^k$ のベクトル束とする．

(*a*)（自然性）$f: N \to M$ を滑らかな写像とする．このとき

$$c(f^*E) = f^*c(E) \tag{11.32}$$

が成り立つ．

(*b*) $F \xrightarrow{\pi'} M$ を $G = \mathrm{GL}(l,\mathbb{C})$ でファイバーが $\mathbb{C}^l$ の別のベクトル束とする．Whitney 和 $E \oplus F$ の全 Chern 類は

$$c(E\oplus F) = c(E)\wedge c(F) \tag{11.33}$$

となる．

証明：

(a) 自然性は定理 11.2 (a) から直接したがう．f^*E の曲率は，$\mathcal{F}_{f^*E} = f^*\mathcal{F}_E$ なので，f^*E の全 Chern 類は

$$c(f^*E) = \det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathcal{F}_{f^*E}\right) = \det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}f^*\mathcal{F}_E\right)$$
$$= f^*\det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathcal{F}_E\right) = f^*c(E)$$

となる．

(b) 行列

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

の Chern 多項式を考えよう．[Whitney 和束の曲率はブロック対角行列である: $\mathcal{F}_{E\oplus F} = \mathrm{diag}(\mathcal{F}_E, \mathcal{F}_F)$.] このとき

$$\det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}A}{2\pi}\right) = \det\begin{pmatrix} \mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}B}{2\pi} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}C}{2\pi} \end{pmatrix}$$
$$= \det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}B}{2\pi}\right)\det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}C}{2\pi}\right) = c(B)c(C)$$

が求まる．この関係は，B と C を $\mathcal{F}_E$ と $\mathcal{F}_F$ にそれぞれ置き換えてもそのまま成り立つ．すなわち

$$c(\mathcal{F}_{E\oplus F}) = c(\mathcal{F}_E) \wedge c(\mathcal{F}_F)$$

で，これは (11.33) が成り立つことを示している．■

問 11.1　(a) E を自明束とする．系 11.1 をつかって

$$c(E) = 1 \tag{11.34}$$

を示せ．

(b) E を $E = E_1 \oplus E_2$ となるベクトル束で，E_1 は k_1 次元ベクトル束，E_2 は k_2 次元自明束とする．このとき

$$c_i(E) = 0 \qquad k_1 + 1 \leq i \leq k_1 + k_2 \tag{11.35}$$

であることを示せ．

11.2.3　分解原理

E を n 個の複素直線束の Whitney 和とする．

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n \tag{11.36}$$

上の (11.33) から

$$c(E) = c(L_1)c(L_2)\dots c(L_n) \tag{11.37}$$

を得る．ここで積は微分形式の外積である．$r \geq 2$ に対して $c_r(L_i) = 0$ であるから

$$c(L_i) = 1 + c_1(L_i) \equiv 1 + x_i \tag{11.38}$$

とかくことができる．このとき，(11.37) は

$$c(E) = \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \tag{11.39}$$

と表される．これと (11.29) を比べると，n 次元ベクトル束 E の Chern 類は，n 個の複素直線束の Whitney 和のそれと同一であることがわかる．一般に，E は n 個の複素直線束の Whitney 和ではないが，その Chern 類に関する限りはそうであるとしてもよい．これは**分解原理**とよばれ，証明なしにこの事実を認めることにする．一般の証明は，例えば Shanahan (1978) と Hirzebruch (1966) を見られたい．

直感的に言えば，もし曲率が対角化されれば，$\mathfrak{g}$ が作用する複素ベクトル空間は k 個の独立な空間に分解する：$\mathbb{C}^k \to \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$．固有値 x_i は各複素直線束の曲率である．対角化可能な行列は，$M(n, \mathbb{C})$ の中で稠密だから，任意の行列は，対角行列によって任意の精度で近似される．ゆえに，分解原理は任意の行列に適用される．演習として，読者は (11.33) を分解原理を用いて証明されたい．

11.2.4 普遍束と分類空間

ここまで読まれた読者は，特性類についてかなり慣れてきたに違いない．本節を閉じる前に，特性類がファイバー束の分類に果たす役割を強調しながら，特性類を少し違った観点から調べよう．$E \xrightarrow{\pi} M$ をファイバー $\mathbb{C}^k$ のベクトル束とする．このとき，ある $n \geq k$ に対して必ず束 $\bar{E} \xrightarrow{\pi'} M$ で

$$E \oplus \bar{E} \cong M \times \mathbb{C}^n \tag{11.40}$$

を満たすものが存在することが知られている．$p \in M$ における E のファイバー F_p は，$\mathbb{C}^n$ の中の k 次元平面である．$G_{k,n}(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^n$ における k 次元平面全体の集合とする．標準的直線束と同様に，ファイバーを $\mathbb{C}^k$ とする $G_{k,n}(\mathbb{C})$ 上の標準的 k 次元平面束 $L_{k,n}(\mathbb{C})$ を定義する．写像 $f : M \to G_{k,n}(\mathbb{C})$ で，点 p を $\mathbb{C}^n$ における k 次元平面 F_p にうつすものを考える．

定理 11.4 M を次元 $\dim M = m$ の多様体，$E \xrightarrow{\pi} M$ をファイバー $\mathbb{C}^k$ の複素ベクトル束とする．このとき，ある自然数 N が存在して $n > N$ に対して：

(a) 写像 $f : M \to G_{k,n}(\mathbb{C})$ で

$$E \cong f^* L_{k,n}(\mathbb{C}) \tag{11.41}$$

を満たすものが存在する．

(b) $f^*L_{k,n}(\mathbb{C}) \cong g^*L_{k,n}(\mathbb{C})$ であるための必要十分条件は，$f, g: M \to G_{k,n}(\mathbb{C})$ がホモトピックとなることである．

証明は Chern (1979) にある．例えば，$E \xrightarrow{\pi} M$ が複素直線束であるならば，ベクトル束 $\bar{E} \xrightarrow{\pi'} M$ で $E \oplus \bar{E} \cong M \times \mathbb{C}^n$ となるようなものが存在し，写像 $f: M \to G_{1,n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ で，$E = f^*L$ となるものが存在する．ただし L は $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の標準的直線束である．さらに，$f \sim g$ ならば f^*L は g^*L と同型である．定理 11.4 はベクトル束の分類が写像 $M \to G_{k,n}(\mathbb{C})$ の ホモトピー類 の分類に帰着されることを示している．

ここで，**分類空間** $G_k(\mathbb{C})$ を定義すると便利である．$\mathbb{C}^n$ における k 次元平面を $\mathbb{C}^{n+1}$ におけるものとも見なして，自然な包含写像

$$G_{k,k}(\mathbb{C}) \hookrightarrow G_{k,k+1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow G_k(\mathbb{C}) \tag{11.42}$$

が得られる．ここで

$$G_k(\mathbb{C}) \equiv \bigcup_{n=k}^{\infty} G_{k,n}(\mathbb{C}) \tag{11.43}$$

である．対応して，ファイバーが $\mathbb{C}^k$ の**普遍束** $L_k \to G_k(\mathbb{C})$ が得られる．ファイバー $\mathbb{C}^k$ の 任意の 複素ベクトル束 $E \xrightarrow{\pi} M$ に対して，$E = f^*L_k(\mathbb{C})$ を満たす写像 $f: M \to G_k(\mathbb{C})$ が存在する．

$E \xrightarrow{\pi} M$ をベクトル束とする．特性類 χ は，写像 $\chi: E \to \chi(E) \in H^*(M)$ で

$$\chi(f^*E) = f^*\chi(E) \qquad \text{(自然性)} \tag{11.44a}$$

$$\chi(E) = \chi(E') \quad \text{(E が E' に同型のとき)} \tag{11.44b}$$

を満たすものとして定義される．(11.44a) において，左辺の f^* は束の引き戻しであり，一方右辺の f^* はコホモロジー類の引き戻しである．写像 $f: M \to G_k(\mathbb{C})$ のホモトピー類 $[f]$ は 一意的に 引き戻し

$$f^*: H^*(G_k) \to H^*(M) \tag{11.45}$$

を定めるので，元 $\chi(E) = f^*\chi(G_k)$ が $\dim E = k$ である M 上の複素ベクトル束 E を分類する際に有効であることが示される．G_k の特性類 $\chi(G_k)$ を一つ指定すると E 上の特性類が一つ得られる．

Chern 類 $c(E)$ も公理的に

$$c(f^*E) = f^*c(E) \qquad \text{(自然性)} \tag{11.46a}$$

$$c(E) = c_0(E) \oplus c_1(E) \oplus \ldots \oplus c_k(E),$$
$$c_i(E) \in H^{2i}(M); c_i(E) = 0, i > k \tag{11.46b}$$

$$c(E \oplus F) = c(E)c(E) \qquad \text{(Whitney 和)} \tag{11.46c}$$

$$c(L) = 1 + x \qquad \text{(規格化)} \tag{11.46d}$$

によって定義[1]される．L は $\mathbb{C}P^n$ 上の標準的直線束である．これらの公理が Chern 類を一意的に (11.25) と定めることが示される．

[1] (11.46d) における " 規格化" とは，$x \neq 0$ を意味し，L の特性類が自明でないことを示す．例えば，特性類が恒等的にゼロと定めると自動的に公理 (11.46a)∼(11.46c) を満たしてしまう場合を排除するため，すなわち特性類が一般に自明でなく意味あるものであることを保証するための公理である．

11.3 Chern 指標

11.3.1 諸定義

特性類の中でも，Chern 指標は Atiyah-Singer の指数定理に現れることから特別な重要性をもつ．**全 Chern 指標**を

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) \equiv \mathrm{tr}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right) = \sum_{j=1} \frac{1}{j!}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^j \tag{11.47}$$

によって定義する．また，j **次 Chern 指標** $\mathrm{ch}_j(\mathcal{F})$ は

$$\mathrm{ch}_j(\mathcal{F}) \equiv \frac{1}{j!}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^j \tag{11.48}$$

である．$2j > m = \dim M$ ならば，$\mathrm{ch}_j(\mathcal{F})$ は消えるので，$\mathrm{ch}(\mathcal{F})$ は有限次数の多項式である．

$\mathcal{F}$ を

$$\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi} \to g^{-1}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)g = A \equiv \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_k) \qquad g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$$

と対角化しよう．全 Chern 指標は

$$\mathrm{tr}[\exp(A)] = \sum_{j=1}^{k} \exp(x_j) \tag{11.49}$$

と表される．基本対称式 $S_r(x_j)$ を使って書くと，全 Chern 指標は

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \exp(x_j) &= \sum_{j=1}^{k}\left(1 + x_j + \frac{1}{2!}x_j^2 + \frac{1}{3!}x_j^3 + \ldots\right) \\ &= k + S_1(x_j) + \frac{1}{2!}[S_1(x_j)^2 - 2S_2(x_j)] + \ldots \end{aligned}\tag{11.50}$$

となる．したがって，各 Chern 指標は Chern 類を用いて

$$\mathrm{ch}_0(\mathcal{F}) = k \tag{11.51a}$$

$$\mathrm{ch}_1(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{F}) \tag{11.51b}$$

$$\mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}[c_1(\mathcal{F})^2 - 2c_2(\mathcal{F})] \tag{11.51c}$$

$$\vdots$$

のように表される．(11.51a) において，k は束のファイバーの次元である．

例 11.2 P を S^2 上の U(1) 束とする．$\mathcal{A}_N$ と $\mathcal{A}_S$ を § 10.5 で定義された U_N と U_S 上の局所接続とするならば，場の強さは $\mathcal{F}_i = \mathrm{d}\mathcal{A}_i$ (i =N, S) で与えられる．このとき

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) = 1 + \frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi} \tag{11.52}$$

が得られる．ここで S^2 上では $\mathcal{F}^n = 0$ $(n \geq 2)$ であることを用いた．このファイバー束は磁気モノポールを記述する．(10.94) で与えられる磁荷 $2g$ は，Chern 指標を用いて

$$N = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{S^2}\mathcal{F} = \int_{S^2}\mathrm{ch}_1(\mathcal{F}) \tag{11.53}$$

と表される 整数 である．

P を S^4 上の SU(2) 束とする．P の全 Chern 類は (11.27) で与えられる．したがって，全 Chern 指標は

$$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) = 2 + \mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^2 \tag{11.54}$$

である．$\mathrm{ch}(\mathcal{F})$ は $n \geq 3$ に対して $\mathcal{F}^n = 0$ なので $\mathrm{ch}_2(\mathcal{F})$ が最終項である．さらに，$G =$ SU(2), $n \geq 2$ のとき $\mathrm{tr}\mathcal{F} = 0$ である．§ 10.5 で求めたように，インスタントン数は

$$\frac{1}{2}\int_{S^4}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^2 = \int_{S^4}\mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) \tag{11.55}$$

で与えられる．

どちらの場合も ch_j は，局所的な部分を貼りあわせるとき，全体ではどれほど捻るかを測っている．

例 11.3 P を $2m$ 次元空間 M 上の U(1) 束とする．このとき，m 次 Chern 指標は

$$\begin{aligned}\frac{1}{m!}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^m &= \frac{1}{m!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^m\left[\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu\right]^m \\ &= \frac{1}{m!}\left(\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\right)^m\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1}\ldots\mathcal{F}_{\mu_m\nu_m}\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_m}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_m} \\ &= \left(\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\right)^m\varepsilon^{\mu_1\nu_1\ldots\mu_m\nu_m}\mathcal{F}_{\mu_1\nu_1}\ldots\mathcal{F}_{\mu_m\nu_m}\mathrm{d}x^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{2m}\end{aligned}$$

で与えられ，これは $2m$ 次元空間における U(1) アノマリーを記述している．第 13 章を参照．

例 11.4 L を複素直線束とする．このとき

$$\mathrm{ch}(L) = \mathrm{tr}\exp\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right) = \mathrm{e}^x = 1 + x \qquad x \equiv \frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi} \tag{11.56}$$

がしたがう．例えば，$L \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^1$ を $\mathbb{C}P^1 = S^2$ 上の標準的直線束とする．Fubini-Study 計量は曲率

$$\mathcal{F} = -\partial\bar{\partial}\ln(1+|z|^2) = -\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} \tag{11.57}$$

を与える．例 8.8 を参照．実座標 $z = x + \mathrm{i}y = r\exp(\mathrm{i}\theta)$ では

$$\mathcal{F} = 2\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2} = 2\mathrm{i}\frac{r\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta}{(1+r^2)^2} \tag{11.58}$$

となる．$\mathrm{ch}(\mathcal{F}) = 1 + \mathrm{tr}(\mathrm{i}\mathcal{F}/2\pi)$ から

$$\mathrm{ch}_1(\mathcal{F}) = -\frac{1}{\pi}\frac{r\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta}{(1+r^2)^2} \tag{11.59}$$

を得る．S^2 上の $\mathrm{ch}_1(\mathcal{F})$ の積分 $\mathrm{Ch}_1(L)$ は整数になる．

$$\mathrm{Ch}_1(L) = -\frac{1}{\pi}\int \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{(1+r^2)^2} = -\int_1^{\infty} t^{-2}\mathrm{d}t = -1 \tag{11.60}$$

11.3.2 Chern 指標の性質

定理 11.5 (*a*) (自然性) $E \xrightarrow{\pi} M$ をファイバー $\mathbb{C}^k$ のベクトル束とする．$f : N \to M$ を滑らかな写像とする．このとき

$$\mathrm{ch}(f^*E) = f^*\mathrm{ch}(E) \tag{11.61}$$

が成り立つ．

(*b*) E と F を多様体 M 上のベクトル束とする．$E \otimes F$ や $E \oplus F$ の Chern 指標は

$$\mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E) \wedge \mathrm{ch}(F) \tag{11.62a}$$

$$\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) \oplus \mathrm{ch}(F) \tag{11.62b}$$

で与えられる．

証明：

(*a*) これは定理 11.2 (*a*) からしたがう．

(*b*) これらの結果は，Chern 多項式の定義からただちに得られる．

$$\mathrm{ch}(A) = \sum (1/j!)\mathrm{tr}(\mathrm{i}A/2\pi)^j$$

を行列Aの多項式とする．A は B と C のテンソル積であると仮定する．$A = B \otimes C = B \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes C$ （$\mathcal{F}_{E\otimes F} = \mathcal{F}_E \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{F}_F$ であることに注意）．このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(B \otimes C) &= \sum_j \left(\frac{1}{j!}\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^j \mathrm{tr}(B \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes C)^j \\
&= \sum_j \left(\frac{1}{j!}\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^j \sum_{m=1}^{j} \begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix} \mathrm{tr}(B^m)\mathrm{tr}(C^{j-m}) \\
&= \sum_m \left(\frac{1}{m!}\right) \mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}B}{2\pi}\right)^m \sum_n \left(\frac{1}{n!}\right) \mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}C}{2\pi}\right)^n = \mathrm{ch}(B)\mathrm{ch}(C)
\end{aligned}$$

である．(11.62*a*) は，B を $\mathcal{F}_E$，C を $\mathcal{F}_F$ で置き換えれば証明できる．

A がブロック対角行列

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = B \oplus C$$

ならば

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(B\oplus C) &= \sum\left(\frac{1}{j!}\right)\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^j \mathrm{tr}(B\oplus C)^j \\ &= \sum\left(\frac{1}{j!}\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right)^j [\mathrm{tr}(B^j)+\mathrm{tr}(C^j)] = \mathrm{ch}(B)+\mathrm{ch}(C)\end{aligned}$$

を得る．この関係式は，A, B, C をそれぞれ $\mathcal{F}_{E\oplus F}, \mathcal{F}_E, \mathcal{F}_F$ に置き換えてもそのまま成り立つ．■

分解原理がこの場合にどう働くかを見てみよう．L_j $(1\le j\le k)$ を複素直線束とする．(11.62b) より，$E = L_1\oplus L_2\oplus\cdots\oplus L_k$ に対して

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{ch}(L_1)\oplus\mathrm{ch}(L_2)\oplus\ldots\oplus\mathrm{ch}(L_k) \tag{11.63}$$

を得る．$\mathrm{ch}(L_i) = \exp(x_i)$ なので

$$\mathrm{ch}(E) = \prod_{j=1}^{k}\exp(x_j) \tag{11.64}$$

となり，これはまさに (11.50) 式である．ゆえに，一般のベクトル束 E の Chern 指標は k 個の複素直線束の Whitney 和の Chern 指標により与えられる．つまり特性類そのものでは，同じ底空間で同じファイバー次元をもつ二つのベクトル束は区別できないということである．重要なのは，底空間上での特性類の 積分 である．

11.3.3 Todd 類

複素ベクトル束に伴う他の特性類で重要なのが

$$\mathrm{Td}(\mathcal{F}) = \prod_j \frac{x_j}{1-\mathrm{e}^{-x_j}} \tag{11.65}$$

で定義される **Todd 類**である．この定義は，分解原理に基づいていることに注意されたい．$\mathrm{Td}(\mathcal{F})$ は，x_j のベキ級数で展開すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Td}(\mathcal{F}) &= \prod_j\left(1+\frac{1}{2}x_j+\sum_{k\ge1}(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}x_j^{2k}\right) \\ &= 1+\frac{1}{2}\sum_j x_j+\frac{1}{12}\sum_j x_j^2+\frac{1}{4}\sum_{j<k}x_jx_k+\ldots \\ &= 1+\frac{1}{2}c_1(\mathcal{F})+\frac{1}{12}[c_1(\mathcal{F})^2+c_2(\mathcal{F})]+\ldots\end{aligned} \tag{11.66}$$

となる．ここで，B_k は **Bernoulli 数**で

$$B_1=\frac{1}{6}, B_2=\frac{1}{30}, B_3=\frac{1}{42}, B_4=\frac{1}{30}, B_5=\frac{5}{66},\ldots$$

で与えられる．(11.66) の最初の数項は

$$\mathrm{Td}_0(\mathcal{F}) = 1 \tag{11.67a}$$

$$\mathrm{Td}_1(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}c_1 \tag{11.67b}$$

$$\mathrm{Td}_2(\mathcal{F}) = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) \tag{11.67c}$$

$$\mathrm{Td}_3(\mathcal{F}) = \frac{1}{24}c_1c_2 \tag{11.67d}$$

$$\mathrm{Td}_4(\mathcal{F}) = \frac{1}{720}(-c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 3c_2^2 + c_1c_3 - c_4) \tag{11.67e}$$

$$\mathrm{Td}_5(\mathcal{F}) = \frac{1}{1440}(-c_1^3c_2 + 3c_1c_2^2 + c_1^2c_3 - c_1c_4) \tag{11.67f}$$

となる．ここで c_i は $c_i(\mathcal{F})$ を表す．

問 11.2 E と F を M 上の複素ベクトル束とする．このとき

$$\mathrm{Td}(E \oplus F) = \mathrm{Td}(E) \wedge \mathrm{Td}(F) \tag{11.68}$$

を示せ．

11.4 Pontrjagin 類と Euler 類

本節では，実ベクトル束に伴う特性類を中心に扱う．

11.4.1 Pontrjagin 類

E を m 次元多様体 M 上の $\dim_{\mathbb{R}} E = k$ である実ベクトル束とする．E にファイバー計量が与えられていれば，それが各ファイバー上で正規直交フレームを定める．したがって，構造群は，$\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ から $\mathrm{O}(k)$ に縮小する．Lie 環 $\mathfrak{o}(k)$ の生成元は歪対称なので，E の場の強さ $\mathcal{F}$ もまた歪対称である．一般に歪対称行列 A は $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ の部分群の元では対角化されない．しかしながら，この行列はブロック対角化され

$$A \to \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & \\ & & -\lambda_2 & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda_1 & & & & \\ & -\mathrm{i}\lambda_1 & & 0 & \\ & & \mathrm{i}\lambda_2 & & \\ & & & -\mathrm{i}\lambda_2 & \\ & 0 & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{11.69}$$

の形に帰着する．ここで2番目の対角化は $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$ の元によってのみ可能である．k が奇数ならば，最後の対角成分はゼロとする．例えば，z 軸の周りの回転を生成する $\mathfrak{o}(3)=\mathfrak{so}(3)$ の生成元は

$$T_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

さて，**全 Pontrjagin 類** を

$$p(\mathcal{F}) \equiv \det\left(\mathbf{1}+\frac{\mathcal{F}}{2\pi}\right) \tag{11.70}$$

によって定義する．歪対称性から，$\mathcal{F}^{\mathrm{t}}=-\mathcal{F}$ なので

$$\det\left(\mathbf{1}+\frac{\mathcal{F}}{2\pi}\right)=\det\left(\mathbf{1}+\frac{\mathcal{F}^{\mathrm{t}}}{2\pi}\right)=\det\left(\mathbf{1}-\frac{\mathcal{F}}{2\pi}\right)$$

が導かれる．これは $p(\mathcal{F})$ が $\mathcal{F}$ の偶関数であることを示している．$p(\mathcal{F})$ の展開は

$$p(\mathcal{F}) = 1 + p_1(\mathcal{F}) + p_2(\mathcal{F}) + \dots \tag{11.71}$$

である．ここで，$p_j(\mathcal{F})$ は位数 $2j$ の多項式であり，$H^{4j}(M;\mathbb{R})$ の元である．$2j>k=\dim E$ あるいは $4j>\dim M$ に対しては，$p_j(\mathcal{F})=0$ であることに注意する．[注：$p_m(\mathcal{F})=0$ でも，行列 B に対して $p_m(B)$ がゼロとなる必要はない．p_m は後で Euler 類を定義するために用いられる．]

$\mathcal{F}/2\pi$ を

$$\frac{\mathcal{F}}{2\pi} \to A \equiv \begin{pmatrix} -\mathrm{i}x_1 & & & & \\ & \mathrm{i}x_1 & & 0 & \\ & & -\mathrm{i}x_2 & & \\ & 0 & & \mathrm{i}x_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{11.72}$$

と対角化しよう．ここで，$x_k \equiv -\lambda_k/2\pi$ で，λ_k は $\mathcal{F}$ の固有値である．符号は後で定義される Euler 類を簡単にするためにこう選んである．$p(\mathcal{F})$ の母関数は

$$p(\mathcal{F}) = \det(\mathbf{1}+A) = \prod_{i=1}^{[k/2]}(1+x_i^2) \tag{11.73}$$

で与えられる．ただし，

$$[k/2] = \begin{cases} k/2 & k\text{ が偶数のとき} \\ (k-1)/2 & k\text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

である．(11.73) では，歪対称性を反映して偶数次のベキのみが現れる．各 Pontrjagin 類は (11.73) から

$$p_j(\mathcal{F}) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_j}^{[k/2]} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \ldots x_{i_j}^2 \tag{11.74}$$

と計算される．$p_j(\mathcal{F})$ を曲率 2-形式 $\mathcal{F}/2\pi$ を用いて書き下すために，まずは

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\mathcal{F}}{2\pi}\right)^{2j} = \mathrm{tr}A^{2j} = 2(-1)^j\sum_{i=1}^{[k/2]} x_i^{2j}$$

が成り立つことに注意する．これより

$$p_1(\mathcal{F}) = \sum_i x_i^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 \tag{11.75a}$$

$$p_2(\mathcal{F}) = \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_i x_i^2\right)^2 - \sum_i x_i^4\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 [(\mathrm{tr}\mathcal{F}^2)^2 - 2\mathrm{tr}\mathcal{F}^4] \tag{11.75b}$$

$$p_3(\mathcal{F}) = \sum_{i<j<k} x_i^2 x_j^2 x_k^2 = \frac{1}{48}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 [-(\mathrm{tr}\mathcal{F}^2)^3 + 6\mathrm{tr}\mathcal{F}^2\mathrm{tr}\mathcal{F}^4 - 8\mathrm{tr}\mathcal{F}^6] \tag{11.75c}$$

$$\begin{aligned} p_4(\mathcal{F}) = \sum_{i<j<k<l} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 = \frac{1}{384}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^8 &[(\mathrm{tr}\mathcal{F}^2)^4 - 12(\mathrm{tr}\mathcal{F}^2)^2\mathrm{tr}\mathcal{F}^4 + 32\mathrm{tr}\mathcal{F}^2\mathrm{tr}\mathcal{F}^6 \\ &+12(\mathrm{tr}\mathcal{F}^4)^2 - 48\mathrm{tr}\mathcal{F}^8] \end{aligned} \tag{11.75d}$$

$$\vdots$$

$$p_{[k/2]}(\mathcal{F}) = x_1^2 x_2^2 \dots x_{[k/2]}^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k \det\mathcal{F} \tag{11.75e}$$

が得られる．読者は

$$p(E \oplus F) = p(E) \wedge p(F) \tag{11.76}$$

が成り立つことを実際に確かめられたい．

Pontrjagin 類が Chern 類を用いて書き表されるであろうことは容易に想像がつく．Chern 類は複素ベクトル束に対してのみ定義されるので，E のファイバーを複素数が意味をもつように複素化しなくてはならない．そうして得られるベクトル束を $E^{\mathbb{C}}$ と表すことにする．A を歪対称な実行列とする．このとき

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{1} + \mathrm{i}A) &= \det\begin{pmatrix} 1+x_1 & & & & 0 \\ & 1-x_1 & & & \\ & & 1+x_2 & & \\ & 0 & & 1-x_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{[k/2]}(1-x_i^2) = 1 - p_1(A) + p_2(A) - \dots \end{aligned}$$

となるが，これより

$$p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E^{\mathbb{C}}) \tag{11.77}$$

が得られる．

例 11.5 M を 4 次元 Riemann 多様体とする．正規直交フレーム $\{\hat{e}_\alpha\}$ を使えば，接束 TM の構造群は O(4) に簡約化される．$\mathcal{R} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ を曲率 2-形式とする（$\mathcal{R}$ をスカラー曲率と混同しないこと）．接束に関しては，$p(\mathcal{R})$ の代わりに $p(M)$ と書くのが習慣である．このとき

$$\det\left(\mathbf{1} + \frac{\mathcal{R}}{2\pi}\right) = 1 - \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\mathcal{R}^2 + \frac{1}{128\pi^4}[(\mathrm{tr}\mathcal{R}^2)^2 - 2\mathrm{tr}\mathcal{R}^4] \tag{11.78}$$

を得る．各 Pontrjagin 類は

$$p_0(M) = 1 \tag{11.79a}$$

$$p_1(M) = -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\mathcal{R}^2 = -\frac{1}{8\pi^2}\mathcal{R}_{\alpha\beta}\mathcal{R}_{\beta\alpha} \tag{11.79b}$$

$$p_2(M) = \frac{1}{128\pi^4}[(\mathrm{tr}\mathcal{R}^2)^2 - 2\mathrm{tr}\mathcal{R}^4] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \det\mathcal{R} \tag{11.79c}$$

で与えられる．$p_2(M)$ は微分形式としては消えるが，つぎの部分節では Euler 類を計算するのに必要となる．

11.4.2 Euler 類

M を $2l$ 次元 向き付け可能 な Riemann 多様体で，TM をその接束とする．その曲率を $\mathcal{R}$ で表す．正規直交フレームを定めることにより TM の構造群はいつでも SO($2l$) に簡約化可能である．M の **Euler 類** e は $4l$-形式 p_l の 平方根 によって定義される．

$$e(A)e(A) = p_l(A) \tag{11.80}$$

$p_i(\mathcal{R})$ は恒等的にゼロなので，両辺は曲率 $\mathcal{R}$ の関数ではなく，$2l \times 2l$ 行列 A の関数であると理解しなければならない．しかしながら，こうして定義される $e(M) \equiv e(\mathcal{R})$ は，$2l$-形式で，実際 M の体積要素を与える．M が奇数次元多様体ならば，$e(M) = 0$ と定義する．下記を参照．

例 11.6 $M = S^2$ とし，接束 TS^2 を考える．例 7.14 から曲率 2-形式が

$$\mathcal{R}_{\theta\phi} = -\mathcal{R}_{\phi\theta} = \sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi}{\sin\theta} = \sin\theta\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi$$

と求められる．ここで，$g_{\theta\theta} = \sin^2\theta$ を用いた．微分形式としては，$p_1(S^2) = 0$ であるが，Euler 形式を求めるためにそれを計算する．

$$\begin{aligned} p_1(S^2) &= -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\mathcal{R}^2 = -\frac{1}{8\pi^2}[\mathcal{R}_{\theta\phi}\mathcal{R}_{\phi\theta} + \mathcal{R}_{\phi\theta}\mathcal{R}_{\theta\phi}] \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi\right)^2 \end{aligned}$$

を得るが，これより

$$e(S^2) = \frac{1}{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi \tag{11.81}$$

が読みとれる．

ここで

$$\int_{S^2} e(S^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin\theta = 2 \tag{11.82}$$

が成り立ち，これが S^2 の Euler 標数に一致することを思い出すと面白い．§ 2.4 を参照．これは単なる偶然ではない．もう一つの根拠となるトーラス T^2 の例をあげよう．T^2 は平坦接続をもつので曲率は恒等的に消える．したがって，$e(T^2) \equiv 0$ で，$\chi(T^2) = 0$ である．これらは，コンパクト多様体 M に対する **Gauss-Bonnet の定理**の特別な場合である．

$$\int_M e(M) = \chi(M) \tag{11.83}$$

M が奇数次元ならば，e も χ も恒等的に消えている．(6.38) を参照．

一般に，$2l \times 2l$ 歪対称行列 A の行列式は **Pfaffian** とよばれるある多項式 $\mathrm{Pf}(A)$ の二乗である．

$$\det A = \mathrm{Pf}(A)^2 \tag{11.84}$$

Pfaffian が

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sum_P \mathrm{sgn}(P) A_{P(1)P(2)} A_{P(3)P(4)} \cdots A_{P(2l-1)P(2l)} \tag{11.85}$$

で与えられることを示そう．ここで，位相 (phase) は後の便宜のために選ばれている．歪対称行列 A は $\mathrm{O}(2l)$ の元により

$$S^{\mathrm{t}} A S = \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & 0 & \\ & & 0 & \lambda_2 & & & \\ & & -\lambda_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & 0 & \lambda_l \\ & & & & & -\lambda_l & 0 \end{pmatrix} \tag{11.86}$$

とブロック対角化された形に書けることにまず注意する．容易に

$$\det A = \det \Lambda = \prod_{i=1}^{l} \lambda_i^2$$

がわかる．$\mathrm{Pf}(\Lambda)$ を計算するときに，(11.85) において消えない項は $A_{12}A_{34}\ldots A_{2l-1,2l}$ の形をしていることに注意する．さらに，添字を $A_{ij} \to A_{ji}$ のように変える

$$A_{12}A_{34}\ldots A_{2l-1,2l} \to A_{21}A_{34}\ldots A_{2l-1,2l}$$

には 2^l 通りの仕方があり，添字の対の置換，例えば

$$A_{12}A_{34}\ldots A_{2l-1,2l} \to A_{34}A_{12}\ldots A_{2l-1,2l}$$

は $l!$ 通りある．ゆえに

$$\mathrm{Pf}(\Lambda) = (-1)^l A_{12}A_{34}\dots A_{2l-1,2l} = (-1)^l \prod_{i=1}^{l} \lambda_i$$

を得る．したがって，ブロック対角行列 Λ については

$$\det \Lambda = \mathrm{Pf}(\Lambda)^2$$

が満たされることが結論づけられる．さらに，(11.84) が（必ずしもブロック対角になっているとは限らない）任意の歪対称行列に対しても正しいことを示すために，つぎの補題を用いる．

$$\mathrm{Pf}(X^{\mathrm{t}}AX) = \mathrm{Pf}(A)\det X \tag{11.87}$$

[**証明**：$\det(X^tAX) = (\det X)^2 \det A$ なので，$\mathrm{Pf}(X^tAX) = \pm\mathrm{Pf}(A)\det X$ を得る．ここで，プラスの符号は $\mathrm{Pf}(I^tAI) = \mathrm{Pf}(A)$ となるように選ばれる．] $S \in \mathrm{O}(2l)$ に対して $S^tAS = \Lambda$ ならば，$A = S\Lambda S^t$ を得るので

$$\mathrm{Pf}(S\Lambda S^t) = \mathrm{Pf}(\Lambda)\det S = (-1)^l \prod_{i=1}^{l} \lambda_i \det S$$

である．結局，任意の歪対称行列 A に対しても $\det A = \mathrm{Pf}(A)^2$ を得る．

$\mathrm{Pf}(A)$ は $\mathrm{SO}(2l)$ 不変であるが，$\mathrm{O}(2l)$ の元 S で $\det S = -1$ となる回転のもとでは符号が変わることに注意せよ．

問 11.3 奇数次歪対称行列の行列式はゼロであることを示せ．これが奇数次元多様体 M に対して，$e(M) = 0$ とする理由である．

曲率 $\mathcal{R}$ を用いて

$$\begin{aligned} e(M) &= \mathrm{Pf}(\mathcal{R}) \\ &= \frac{(-1)^l}{(4\pi)^l l!} \sum_P \mathrm{sgn}(P)\mathcal{R}_{P(1)P(2)} \dots \mathcal{R}_{P(2l-1)P(2l)} \end{aligned} \tag{11.88}$$

が得られる．母関数は，$x_j = -\lambda_i/2\pi$ と取ることによって得られる．

$$e(x) = x_1x_2\dots x_l = \prod_{i=1}^{l} x_i \tag{11.89}$$

位相 $(-1)^l$ は，この右辺を簡明にするために選ばれた．

例 11.7 M を向きづけ可能な 4 次元多様体とする．TM の構造群は SO(4) である；例 11.5 を参照．その Euler 類は (11.88) から

$$e(M) = \frac{1}{2(4\pi)^2}\varepsilon^{ijkl}\mathcal{R}_{ij} \wedge \mathcal{R}_{kl} \tag{11.90}$$

と得られる．これは例 11.5 の結果とも一致する．関連する Pontrjagin 類は

$$p_2(M) = \frac{1}{128\pi^4}[(\mathrm{tr}\mathcal{R}^2)^2 - 2\mathrm{tr}\mathcal{R}^4] = x_1^2x_2^2$$

となる．$e(M) = x_1 x_2$ なので，$p_2(M) = e(M) \wedge e(M)$ を得る．これは行列の等式として

$$\frac{1}{128\pi^4}\left[(\mathrm{tr}A^2)^2 - 2\mathrm{tr}A^4\right] = \left(\frac{1}{2(4\pi)^4}\varepsilon^{ijkl}A_{ij}A_{kl}\right)^2$$

と書かれる．

11.4.3 Hirzebruch の L 種数と $\hat{A}$ 種数

Hirzebruch の L 多項式が

$$L(x) = \prod_{j=1}^{k} \frac{x_j}{\tanh x_j} = \prod_{j=1}^{k}\left(1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}B_n x_j^{2n}\right) \tag{11.91}$$

によって定義される．ここで，B_n は Bernoulli 数である．(11.66) を参照．$L(x)$ は x_j の偶関数であり，Pontrjagin 類により

$$L(\mathcal{F}) = 1 + \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{45}(-p_1^2 + 7p_2) + \frac{1}{945}(2p_1^3 - 13p_1p_2 + 62p_3) + \ldots \tag{11.92}$$

と書かれる．p_j は $p_j(\mathcal{F})$ を表す．分解原理から

$$L(E \oplus F) = L(E) \wedge L(F) \tag{11.93}$$

が得られる．

$\hat{A}$ 種数 $\hat{A}(\mathcal{F})$ を

$$\hat{A}(\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{k}\frac{x_j/2}{\sinh(x_j/2)} = \prod_{j=1}^{k}\left(1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{(2^{2n}-2)}{(2n)!}B_n x_j^{2n}\right) \tag{11.94}$$

で定義する．これは x_j の偶関数であり，p_j で展開される．$\hat{A}$ は物理学者により **Dirac 種数**ともよばれている．$\hat{A}$ は

$$\hat{A}(E \oplus F) = \hat{A}(E) \wedge \hat{A}(F) \tag{11.95}$$

を満たす．$\hat{A}$ は Pontrjagin 類により

$$A(\mathcal{F}) = 1 - \frac{1}{24}p_1 + \frac{1}{5760}(7p_1^2 - 4p_2) + \frac{1}{967680}(-31p_1^3 + 44p_1p_2 - 16p_3) + \ldots \tag{11.96}$$

と表される．

例 11.8 M をコンパクトで連結な向きづけ可能4次元多様体とする．そこで，

$$\sigma([\alpha],[\beta]) = \int_M \alpha \wedge \beta \tag{11.97}$$

で定義される対称双一次形式 $\sigma : H^2(M;\mathbb{R}) \times H^2(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を考えよう．σ は $b^2 = \dim H^2(M;\mathbb{R})$ として $b^2 \times b^2$ 行列になる．任意の $[\alpha] \in H^2(M;\mathbb{R})$ に対して $\sigma([\alpha],[\beta]) = 0$ ならば $[\beta] = 0$ が成り立つので，σ は非退化である．p (q) を σ の正（負）の固有値の個数とする．M の **Hirzebruch の符号数**を

$$\tau(M) \equiv p - q \tag{11.98}$$

によって定義する．**Hirzebruch の符号数定理**（§ 12.5 を参照）により，この数はまた L 多項式によって

$$\tau(M) = \int_M L_1(M) = \frac{1}{3}\int_M p_1(M) \tag{11.99}$$

と表される．

11.5 Chern-Simons 形式

11.5.1 諸定義

$P_j(\mathcal{F})$ を任意の $2j$-形式の特性類とする．$P_j(\mathcal{F})$ は閉形式なので，Poincaré の補題より局所的には完全形式としても表される．そこで

$$P_j(\mathcal{F}) = \mathrm{d}Q_{2j-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}) \tag{11.100}$$

と書くことにしよう．ここで $Q_{2j-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}) \in \mathfrak{g}\otimes\Omega^{2j-1}(M)$ である．[注：これは大域的には正しいとは限らない．もし，境界をもたない多様体 M 上で大域的に $P_j = \mathrm{d}Q_{2j-1}$ ならば，$\dim M = m$ として

$$\int_M P_{m/2} = \int_M \mathrm{d}Q_{m-1} = \int_{\partial M} Q_{m-1} = 0$$

を得る．] $Q_{2j-1}(\mathcal{A},\mathcal{F})$ は $P_j(\mathcal{F})$ の **Chern-Simons 形式**とよばれる．定理 11.2 (b) から，Q は P_j の転入によって与えられることがわかる．

$$Q_{2j-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}) = TP_j(\mathcal{A},0) = j\int_0^1 \tilde{P}_j(\mathcal{A},\mathcal{F}_t,\ldots,\mathcal{F}_t)\mathrm{d}t \tag{11.101}$$

ここで，$\tilde{P}_j$ は P_j の極化で，$\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A} + \mathcal{A}^2$ であり，$\mathcal{A}' = \mathcal{F}' = 0$ とおいている．Q_{2j-1} は $\mathcal{F}$ と $\mathcal{A}$ の取り方によるので，$\mathcal{A}$ 依存性を明示した．もちろん，$\mathcal{A}'$ は束が自明となるような局所チャートの上でのみゼロに等しいとおくことができる．

M を $\partial M \neq \emptyset$ であるような偶数次元多様体（$\dim M = m = 2l$）と仮定する．このとき，Stokes の定理から

$$\int_M P_l(\mathcal{F}) = \int_M \mathrm{d}Q_{m-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}) = \int_{\partial M} Q_{m-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}) \tag{11.102}$$

が得られる．左辺は，整数に値をもつので，右辺も同様である．したがって，Q_{m-1} はそれ自身で特性類になっている．Q_{m-1} は境界 ∂M の位相構造を記述するものである．

11.5.2 Chern 指標の Chern-Simons 形式

例として，Chern 指標 $\mathrm{ch}_j(\mathcal{F})$ の Chern-Simons 形式を調べよう．0 と $\mathcal{A}$ をつなぐ接続 $\mathcal{A}_t$ は

$$\mathcal{A}_t = t\mathcal{A} \tag{11.103}$$

であり，対応する曲率は

$$\mathcal{F}_t = t\mathrm{d}\mathcal{A} + t^2\mathcal{A}^2 = t\mathcal{F} + (t^2 - t)\mathcal{A}^2 \tag{11.104}$$

である．(11.21) から

$$Q_{2j-1}(\mathcal{A},\mathcal{F}) = \frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^j \int_0^1 \mathrm{d}t\ \mathrm{str}(\mathcal{A},\mathcal{F}_t^{j-1}) \tag{11.105}$$

となる．例えば，

$$Q_1(\mathcal{A},\mathcal{F}) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}t\ \mathrm{tr}\mathcal{A} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathrm{tr}\mathcal{A} \tag{11.106a}$$

$$\begin{aligned} Q_3(\mathcal{A},\mathcal{F}) &= \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2 \int_0^1 \mathrm{d}t\ \mathrm{str}(\mathcal{A}, t\mathrm{d}\mathcal{A} + t^2\mathcal{A}^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2 \mathrm{tr}(\mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{A} + \frac{2}{3}\mathcal{A}^3) \end{aligned} \tag{11.106b}$$

$$\begin{aligned} Q_5(\mathcal{A},\mathcal{F}) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^3 \int_0^1 \mathrm{d}t\ \mathrm{str}[\mathcal{A}, (t\mathrm{d}\mathcal{A} + t^2\mathcal{A}^2)^2] \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^3 \mathrm{tr}[\mathcal{A}(\mathrm{d}\mathcal{A})^2 + \frac{3}{2}\mathcal{A}^3\mathrm{d}\mathcal{A} + \frac{3}{5}\mathcal{A}^5] \end{aligned} \tag{11.106c}$$

が得られる．

問 11.4 $\mathcal{F}$ を SU(2) ゲージ理論の場の強さとする．このとき

$$\mathrm{tr}[\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{F}_{\kappa\lambda}\mathcal{F}_{\mu\nu}] = \partial_\kappa[2\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathrm{tr}(\mathcal{A}_\lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\nu + \frac{2}{3}\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu)] \tag{11.107}$$

が成り立つことを確かめるために，等式 $\mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) = \mathrm{d}Q_3(\mathcal{A},\mathcal{F})$ の成分表示を書き下せ．補題 10.3 を参照せよ．

11.5.3 Cartan のホモトピー作用素とその応用

後の目的にために，Zumino (1985) と Alvarez-Gaumé and Ginsparg (1985) にしたがい，Cartan のホモトピー公式を定義する．前と同じように

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_0 + t(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) \quad \mathcal{F}_t = \mathrm{d}\mathcal{A}_t + \mathcal{A}_t^2 \tag{11.108}$$

とする．そこで，作用素 l_t を

$$l_t\mathcal{A}_t = 0 \quad l_t\mathcal{F}_t = \delta t(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) \tag{11.109}$$

によって定義する．$\eta_p \in \Omega^p(M)$ と $\omega_q \in \Omega^q(M)$ に対して，l_t は反微分

$$l_t(\eta_p\omega_q) = (l_t\eta_p)\omega_q + (-1)^p\eta_p(l_t\omega_q) \tag{11.110}$$

となることを要請する．ここで

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}l_t + l_t\mathrm{d})\mathcal{A}_t &= l_t(\mathcal{F}_t - \mathcal{A}_t^2) = \delta t(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) = \delta t\frac{\partial\mathcal{A}_t}{\partial t} \\
(\mathrm{d}l_t + l_t\mathrm{d})\mathcal{F}_t &= \mathrm{d}[\delta t(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0)] + l_t[\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t - \mathcal{A}_t\mathcal{F}_t + \mathcal{F}_t\mathcal{A}_t] \\
&= \delta t[\mathrm{d}(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) + \mathcal{A}_t(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) + (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0)\mathcal{A}_t] \\
&= \delta t\mathcal{D}_t(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_0) = \delta t\frac{\partial\mathcal{F}_t}{\partial t}
\end{aligned}$$

が確かめられるが，途中で Bianchi 恒等式を用いている．これは，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{F}$ の任意の多項式 $S(\mathcal{A},\mathcal{F})$ に対して

$$(\mathrm{d}l_t + l_t\mathrm{d})S(\mathcal{A}_t,\mathcal{F}_t) = \delta t\frac{\partial}{\partial t}S(\mathcal{A}_t,\mathcal{F}_t) \tag{11.111}$$

が得られることを示している．右辺において，S は $\mathcal{A}$ と $\mathcal{F}$ だけの多項式であり，$\mathrm{d}\mathcal{A}$ あるいは $\mathrm{d}\mathcal{F}$ の多項式ではない．もし S がそれらを含めば，$\mathrm{d}\mathcal{A}$ は $\mathcal{F}-\mathcal{A}^2$ で，$\mathrm{d}\mathcal{F}$ は $\mathcal{D}\mathcal{F}-[\mathcal{A},\mathcal{F}] = -[\mathcal{A},\mathcal{F}]$ で置き換えられなければならない．(11.111) を $[0,1]$ 上で積分すると，**Cartan のホモトピー公式**

$$S(\mathcal{A}_1,\mathcal{F}_1) - S(\mathcal{A}_0,\mathcal{F}_0) = (\mathrm{d}k_{01} + k_{01}d)S(\mathcal{A}_t,\mathcal{F}_t) \tag{11.112}$$

を得る．ここで，**ホモトピー作用素** k_{01} は

$$k_{01}S(\mathcal{A}_t,\mathcal{F}_t) \equiv \int_0^1 l_tS(\mathcal{A}_t,\mathcal{F}_t) \tag{11.113}$$

で定義されるものである．$S(\mathcal{A},\mathcal{F})$ 上に k_{01} を作用させるために，$\mathcal{A}$ と $\mathcal{F}$ をそれぞれ $\mathcal{A}_t$ と $\mathcal{F}_t$ に置き換えて，l_t を $S(\mathcal{A}_t,\mathcal{F}_t)$ に作用させて，t で積分する．

例 11.9 ホモトピー公式を用いて，Chern 指標の Chern-Simons 形式を計算しよう．$S(\mathcal{A},\mathcal{F}) = \mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F})$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}, \mathcal{A}_0 = 0$ とする．$\mathrm{d}\,\mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F}) = 0$ なので，

$$\mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F}) = (\mathrm{d}k_{01} + k_{01}\mathrm{d})\mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t) = \mathrm{d}[k_{01}\mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t)]$$

を得る．したがって，$k_{01}\mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F})$ は，Chern-Simons 形式 $Q_{2j+1}(\mathcal{A},\mathcal{F})$ と同一である．

$$\begin{aligned}
k_{01}\mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t) &= \frac{1}{(j+1)!}k_{01}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^{j+1} \\
&= \frac{1}{(j+1)!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^{j+1}\int_0^1 l_t\mathrm{tr}(\mathcal{F}_t^{j+1}) \\
&= \frac{1}{j!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^{j+1}\int_0^1 \delta t\mathrm{str}(\mathcal{A}\mathcal{F}_t^j)
\end{aligned} \tag{11.114}$$

が得られるが，これは (11.105) と一致する．

特性類はゲージ不変量であるが，Chern-Simons 形式はそうである必要はない．Cartan のホモトピー公式の応用として，変換 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^g = g^{-1}(\mathcal{A} + \mathrm{d})g, \mathcal{F} \to \mathcal{F}^g = g^{-1}\mathcal{F}g$ のもとで $Q_{2j+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ の変化を計算する．

$$\mathcal{A}_t^g \equiv tg^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}\mathrm{d}g \tag{11.115a}$$

$$\mathcal{F}_t^g \equiv \mathrm{d}\mathcal{A}_t^g + (\mathcal{A}_t^g)^2 = g^{-1}\mathcal{F}_t g \tag{11.115b}$$

で定義される族 $\mathcal{A}_t^g$ と $\mathcal{F}_t^g$ を考える．ここで，$\mathcal{F}_t \equiv t\mathcal{F} + (t^2 - t)\mathcal{A}^2$ である．$\mathcal{A}_0^g = g\mathrm{d}g$，$\mathcal{A}_1^g = \mathcal{A}^g$，$\mathcal{F}_0^g = 0, \mathcal{F}_1^g = \mathcal{F}^g$ に注意せよ．このとき，(11.112) は

$$Q_{2j+1}(\mathcal{A}^g, \mathcal{F}^g) - Q_{2j+1}(g^{-1}\mathrm{d}g, 0) = (\mathrm{d}k_{01} + k_{01}\mathrm{d})Q_{2j+1}(\mathcal{A}_t^g, \mathcal{F}_t^g) \tag{11.116}$$

を与える．例えば，Q_{2j+1} を Chern 指標 $\mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F})$ の Chern-Simons 形式とする．$\mathrm{d}Q_{2j+1}(\mathcal{A}_t^g, \mathcal{F}_t^g) = \mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t^g) = \mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t)$ なので

$$\begin{aligned} k_{01}\mathrm{d}Q_{2j+1}(\mathcal{A}_t^g, \mathcal{F}_t^g) &= k_{01}\mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t^g) \\ &= k_{01}\mathrm{ch}_{j+1}(\mathcal{F}_t) = Q_{2j+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) \end{aligned} \tag{11.117}$$

を得る．ここで，最後の等式を得るために例 11.9 の結果を使った．これらの結果をまとめると，(11.116) は

$$Q_{2j+1}(\mathcal{A}^g, \mathcal{F}^g) - Q_{2j+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = Q_{2j+1}(g^{-1}\mathrm{d}g, 0) + \mathrm{d}\alpha_{2j} \tag{11.118}$$

となる．ここで，α_{2j} は

$$\begin{aligned} \alpha_{2j}(\mathcal{A}, \mathcal{F}, v) &\equiv k_{01}Q_{2j+1}(\mathcal{A}_t^g, \mathcal{F}_t^g) \\ &= k_{01}Q_{2j+1}(\mathcal{A}_t + v, \mathcal{F}_t) \end{aligned} \tag{11.119}$$

で定義される $2j$-形式である．ただし，$v \equiv \mathrm{d}g \cdot g^{-1}$ である．[$Q_{2j+1}(\mathcal{A}, \mathcal{F}) = Q_{2j+1}(g\mathcal{A}g^{-1}, g\mathcal{F}g^{-1})$ に注意．] (11.118) の右辺の最初の項は

$$\begin{aligned} Q_{2j+1}(g^{-1}\mathrm{d}g, 0) &= \frac{1}{j!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^{j+1} \int_0^1 \delta t \mathrm{tr}[g^{-1}\mathrm{d}g\{(t^2 - t)(g^{-1}\mathrm{d}g)^2\}^j] \\ &= \frac{1}{j!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^{j+1} \mathrm{tr}[(g^{-1}\mathrm{d}g)^{2j+1}] \int_0^1 \delta t(t^2 - t)^j \\ &= (-1)^j \frac{j!}{(2j+1)!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^{j+1} \mathrm{tr}[(g^{-1}\mathrm{d}g)^{2j+1}] \end{aligned} \tag{11.120}$$

である．ここで $\mathcal{F}_t = (t^2 - t)(g^{-1}\mathrm{d}g)^2$ であり

$$\int_0^1 \delta t(t^2 - t)^j = (-1)^j B(j+1, j+1) = (-1)^j \frac{(j!)^2}{(2j+1)!}$$

であることを用いた．B はベータ関数である．$Q_{2j+1}(g\mathrm{d}g, 0)$ は閉形式なので，局所的には完全である：$\mathrm{d}Q_{2j+1}Q_{2j+1}Q_{2j+1}(g^{-1}\mathrm{d}g, 0) = \mathrm{ch}(0) = 0$.

α_{2j} に関しては，例えば

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2 \int_0^1 l_t \mathrm{tr}[(\mathcal{A}_t + v)\mathcal{F}_t - \frac{1}{3}(\mathcal{A}_t + v)^3]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2 \int_0^1 \delta t \mathrm{tr}(-t\mathcal{A}^2 - v\mathcal{A}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2 \mathrm{tr}(v\mathcal{A}) \tag{11.121}$$

を得るが，ここで $\mathrm{tr}\,\mathcal{A}^2 = \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu\,\mathrm{tr}(\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu) = -\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{tr}(\mathcal{A}_\nu\mathcal{A}_\mu) = 0$ であることを用いた.

例 11.10 3 次元時空において，ゲージ理論は Chern-Simons 3-形式で与えられるゲージ不変な質量項をもつ（Jackiw & Templeton (1981) または Deser 他 (1982a, b)）. Chern-Simons 形式はゲージ変換のもとで局所的に完全形式の分だけ変化するが，作用は不変なままである．簡単のため U(1) ゲージ理論に限定して話を進めよう．まず，ラグランジアン（$\mathcal{A} = \mathrm{i}A$, $\mathcal{F} = \mathrm{i}F$ とおく）

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}m\varepsilon^{\lambda\mu\nu}F_{\lambda\mu}A_\nu \tag{11.122}$$

を考える．ここで $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ である．2 番目の項は,（定数倍を除いて）U(1) 束の第 2Chern 指標 F^2 の Chern-Simons 形式である．場の方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m * F^\nu = 0 \tag{11.123}$$

であり，ここで

$$*F^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda}, F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\lambda} * F_\lambda$$

である．Bianchi 恒等式

$$\partial_\mu * F^\mu = 0 \tag{11.124}$$

が $F^{\mu\nu}$ の歪対称性の結論として導かれる．容易に確かめられるように，場の方程式はゲージ変換のもとで不変である.

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\theta \tag{11.125}$$

一方，ラグランジアンは全微分の分だけ変化する.

$$\mathcal{L} \to -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}m\varepsilon^{\lambda\mu\nu}F_{\lambda\mu}(A_\nu + \partial_\nu\theta) = \mathcal{L} + \frac{1}{2}m\partial_\nu(*F^\nu\theta) \tag{11.126}$$

(11.106a) は，右辺の最後の項が

$$Q_3(A^\theta, F^\theta) - Q_3(A, F) \sim (A + \mathrm{d}\theta)\mathrm{d}A - A\mathrm{d}A \sim \mathrm{d}(\theta\mathrm{d}A)$$

と等しいことを示している．もし，F が大きい時空距離においてゼロになるとと仮定すれば，この項は作用に貢献しない：

$$\int \mathrm{d}^3x\mathcal{L} \to \int \mathrm{d}^3x\mathcal{L} + \frac{m}{2}\int \mathrm{d}^3x\partial_\nu(*F^\nu\theta) = \int \mathrm{d}^3x\mathcal{L} \tag{11.127}$$

(11.122) が <u>質量</u> をもつ場を記述することを示そう．最初に，(11.123) を

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\partial_\mu * F_\alpha = -m * F^\nu$$

と書く．両辺に，$\varepsilon_{\kappa\lambda\nu}$ を掛けると

$$\partial_\lambda * F_\kappa - \partial_\kappa * F_\lambda = -mF_{\kappa\lambda}$$

を得る．∂^λ 微分をとり，(11.124) を用いると

$$(\partial^\lambda \partial_\lambda + m^2) * F_\kappa = 0 \tag{11.128}$$

となるが，これは $*F_\kappa$ が質量 m のベクトル場であることを示している．

11.6 Stiefel-Whitney 類

特性類の最後の例は，Stiefel-Whitney 類である．今までの特性類とは対照的に，Stiefel-Whitney 類は束の曲率を用いてあらわすことはできない．Stiefel-Whitney 類は物理学において重要である，というのは多様体がスピン構造をもつかどうかを教えてくれるからである．スピン束の簡単なまとめから始めよう．

11.6.1 スピン束

$TM \xrightarrow{\pi} M$ を $\dim M = m$ の多様体 M の接束とする．TM はファイバー計量をもち，その構造群 G は $\mathrm{O}(m)$ に取られると仮定しよう．もしさらに M が向きづけ可能ならば，G は $\mathrm{SO}(m)$ に縮めることができる．LM を TM に同伴するフレーム束とする．t_{ij} を両立条件 (9.6) 式

$$t_{ij}t_{jk}t_{ki} = \mathbf{1} \quad t_{ii} = \mathbf{1}$$

を満たす LM の変換関数とする．M 上のスピン構造は変換関数 $\tilde{t}_{ij} \in \mathrm{SPIN}(m)$ で

$$\varphi(\tilde{t}_{ij}) = t_{ij},\ \tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = \mathbf{1},\ \tilde{t}_{ii} = \mathbf{1} \tag{11.129}$$

を満たすものによって定義される．ここで，φ は二重被覆 $\mathrm{SPIN}(m) \to \mathrm{SO}(m)$ である．$\tilde{t}_{ij}$ の集合は，M 上の**スピン束** $PS(M)$ を定め，このとき，M は**スピン構造**を許容するという（もちろん，M は $\tilde{t}_{ij}$ の選び方により様々なスピン構造を許容するかもしれない）．

すべての多様体がスピン構造をもつわけではないことを注意しておくのは重要である．スピン構造の有無は，Čech コホモロジー群 $H^2(M;\mathbb{Z}_2)$ に値をとる第 2 Stiefel-Whitney 類により測られる．

11.6.2 Čech コホモロジー群

$\mathbb{Z}_2$ を乗法群 $\{-1,+1\}$ とする．**Čech r-コチェイン**とは，$U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \ldots \cap U_{i_r} \neq \emptyset$ 上で定義された関数 $f(i_0, i_1, \ldots, i_r) \in \mathbb{Z}_2$ で，任意の置換 P のもとで完全対称

$$f(i_{P(0)}, \ldots, i_{P(r)}) = f(i_0, \ldots, i_r)$$

なものである．$C^r(M;\mathbb{Z}_2)$ をČech r-コチェイン全体のなす乗法群とする．そこで，コバウダリ作用素 $\delta: C^r(M;\mathbb{Z}_2) \to C^{r+1}(M;\mathbb{Z}_2)$ を

$$(\delta f)(i_0,\ldots,i_{r+1}) = \prod_{j=0}^{r+1} f(i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{r+1}) \tag{11.130}$$

によって定義する．ここで，$\hat{}$ の下の変数は取り去られている．例えば，

$$(\delta f_0)(i_0,i_1) = f_0(i_1)f_0(i_0) \quad f_0 \in C^0(M;\mathbb{Z}_2)$$

$$(\delta f_1)(i_0,i_1,i_2) = f_1(i_1,i_2)f_1(i_0,i_2)f_1(i_0,i_1)$$

である．我々は乗法的表示を用いているので，$C^r(M;\mathbb{Z}_2)$ の単位元を 1 で表す．δ がベキ零となることを確かめる：

$$(\delta^2 f)(i_0,\ldots,i_{r+2}) = \prod_{j,k=1}^{r+1} f(i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_{r+2}) = 1$$

最後の等式は，中央の式で -1 がつねに偶数回現れているので成り立つ．（例えば，$f(i_0,\ldots,\hat{i_j},\ldots,\hat{i_k},\ldots,i_{r+2}) = -1$ ならば，$f(i_0,\ldots,\hat{i_k},\ldots,\hat{i_j},\ldots,i_{r+2}) = -1$ が f の対称性から得られる.）したがって，任意のČech r-コチェイン f に対して

$$\delta^2 f = 1 \tag{11.131}$$

を示したことになる．そこで，コサイクル群 $Z^r(M;\mathbb{Z}_2)$ とコバウダリ群 $B^r(M;\mathbb{Z}_2)$ を

$$Z^r(M,\mathbb{Z}_2) = \{f \in C^r(M;\mathbb{Z}_2) | \delta f = 1\} \tag{11.132}$$

$$B^r(M;\mathbb{Z}_2) = \{f \in C^r(M;\mathbb{Z}_2) | f = \delta f',\ f' \in C^{r-1}(M;\mathbb{Z}_2)\} \tag{11.133}$$

によって定義しよう．すると r 次**Čech コホモロジー群** $H^r(M;\mathbb{Z}_2)$ が

$$H^r(M;\mathbb{Z}_2) = \ker \delta_r / \mathrm{im}\, \delta_{r-1} = Z^r(M;\mathbb{Z}_2)/B^r(M;\mathbb{Z}_2) \tag{11.134}$$

によって定義される．

11.6.3 Stiefel-Whitney 類

Stiefel-Whitney 類 w_r は $H^r(M;\mathbb{Z}_2)$ に値をとる特性類である．$TM \xrightarrow{\pi} M$ を Riemann 計量をもつ接束とする．構造群は，$\dim M = m$ として $\mathrm{O}(m)$ である．$\{U_i\}$ を M の**単純開被覆**，すなわち任意個のチャートの交わりは，空集合であるか可縮であるとする．$\{e_{i\alpha}\}$ $(1 \le \alpha \le m)$ を U_i 上の TM のある局所正規直交フレームとする．このとき，$t_{ij}: U_i \cap U_j \to \mathrm{O}(m)$ を変換関数とすれば $e_{i\alpha} = t_{ij}e_{j\alpha}$ を得る．そこで，Čech 1-コチェイン $f(i,j)$ を

$$f(i,j) \equiv \det(t_{ij}) = \pm 1 \tag{11.135}$$

によって定義する．$f(i,j)=f(j,i)$ が成り立つから，実際 $C^1(M;\mathbb{Z}_2)$ の元である．コサイクル条件 $t_{ij}t_{jk}t_{ki}=\mathbf{1}$ から

$$\delta f(i,j,k) = \det(t_{ij})\det(t_{jk})\det(t_{ki}) \\ = \det(t_{ij}t_{jk}t_{ki}) = 1 \tag{11.136}$$

が確かめられる．ゆえに，$f\in Z^1(M;\mathbb{Z}_2)$ であり，これは元 $[f]\in H^1(M;\mathbb{Z}_2)$ を定める．さて，この元が局所フレームの取り方によらないことを示そう．$\{\bar{e}_{i\alpha}\}$ を U_i 上の別のフレームで，$\bar{e}_{i\alpha}=h_ie_{i\alpha}$, $h_i\in \mathrm{O}(m)$ を満たすものとする．$\bar{e}_{i\alpha}=\bar{t}_{ij}\bar{e}_{j\alpha}$ から $\bar{t}_{ij}=h_it_{ij}h_j^{-1}$ を得る．0-コチェイン f_0 を $f_0(i)\equiv\det h_i$ によって定義すれば，

$$\begin{aligned}\tilde{f}(i,j) &= \det(h_it_{ij}h_j^{-1})=\det(h_i)\det(h_j)\det(t_{ij})\\ &= \delta f_0(i)f_0(j)f(i,j)\end{aligned}$$

となる．したがって，f はコバウダリの分だけ変化するので，結局同じコホモロジー類 $[f]$ を定める（乗法的表示を用いていることに再度注意する）．この特別な元 $w_1(M)\equiv[f]\in H^1(M;\mathbb{Z}_2)$ が**第 1 Stiefel-Whitney 類**とよばれるものである．

定理 11.6 $TM\stackrel{\pi}{\longrightarrow}M$ をファイバー計量をもつ接束とする．M が向きづけ可能であるための必要十分条件は，$w_1(M)$ が自明となることである．

証明: M が向きづけ可能ならば，その構造群は $\mathrm{SO}(m)$ に帰着するので，$f(i,j)=\det(t_{ij})=1$ で，したがって $w_1(M)$ は $H^1(M;\mathbb{Z}_2)$ の単位元 1 である．逆に，$w_1(M)$ が自明ならば，f はコバウダリである；$f=\delta f_0$．$f_0(i)=\pm1$ なので，いつでも $h_i\in\mathrm{O}(m)$ を選んで，各 i に対して $\det(h_i)=f_0(i)$ を満たすようにできる．新しいフレームを $\bar{e}_{i\alpha}=h_ie_{i\alpha}$ と定義すれば，変換関数 $\bar{t}_{ij}$ で，共通部分をもつ任意の対 (i,j) に対して $\det(\bar{t}_{ij})=1$ となるものを得るので，M は向きづけ可能である．[ある対 (i,j) に対して $f(i,j)=\det t_{ij}=-1$ と仮定する．このとき，$f_0(i)=-1$, $f_0(j)=+1$ としてよいから，$\det\bar{t}_{ij}=-\det t_{ij}=+1$.] ∎

定理 11.6 は，第 1 Stiefel-Whitney 類が多様体の向きづけ可能性の障害になっていることを示している．つぎに，第 2 Stiefel-Whitney 類を定義しよう．M を向きづけ可能な多様体で，TM をその接束とする．変換関数 $t_{ij}\in\mathrm{SO}(m)$ に対して，その‘リフト’ $\tilde{t}_{ij}\in\mathrm{SPIN}(m)$ で

$$\varphi(\tilde{t}_{ij})=t_{ij},\ \tilde{t}_{ji}=\tilde{t}_{ij}^{-1} \tag{11.137}$$

を満たすものを考える．ここで，$\varphi:\mathrm{SPIN}(m)\to\mathrm{SO}(m)$ は 2 : 1 準同型写像である（選択の仕方 $t_{ij}\leftrightarrow\tilde{t}_{ij}$ または $-\tilde{t}_{ij}$ があることに注意）．このリフトは局所的にはいつでも存在する．

$$\varphi(\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki})=t_{ij}t_{jk}t_{ki}=\mathbf{1}$$

なので，$\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki}\in\ker\varphi=\{\pm\mathbf{1}\}$ を得る．$\tilde{t}_{ij}$ が M 上のスピン束を定義するためには，それらがコサイクル条件

$$\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki}=\mathbf{1} \tag{11.138}$$

を満たさなくてはならない．そこで，Čech 2-コチェイン $f : U_i \cap U_j \cap U_k \to \mathbb{Z}_2$ を

$$\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = f(i,j,k)\mathbf{1} \tag{11.139}$$

で定義する．容易にわかるように，f は対称かつ閉である．したがって，f は**第 2 Stiefel-Whitney 類**とよばれる元 $w_2(M) \in H^2(M;\mathbb{Z}_2)$ を定める．$w_2(M)$ は局所フレームの取り方によらないことが示される．

問 11.5 t_{ij} の別のリフト $-\tilde{t}_{ij}$ をとるとする．この変更のもとで，f はコバウダリ分だけ変化することを示せ．したがって，$[f]$ はリフトの選び方にもよらない．［ヒント：$f_1(i,j)$ を $\pm\tilde{t}_{ij}$ の符号とするとき，$f(i,j,k) \longrightarrow f(i,j,k)\delta f_1(i,j,k)$ を示せ．］

定理 11.7 TM を向きづけ可能多様体 M 上の接束とする．M 上にスピン束が存在するために必要十分条件は，$w_2(M)$ が自明になることである．

証明：M 上にスピン束が存在すると仮定する．このとき変換関数 $\tilde{t}_{ij}$ で，交わりが空でないチャート U_i, U_j, U_k 上で $\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki} = 1$ を満たすものの集合が定義できるので，$w_2(M)$ は自明である．逆に，$w_2(M)$ が自明と仮定する．すなわち

$$f(i,j,k) = \delta f_1(i,j,k) = f_1(j,k)f_1(i,k)f_1(k,i)$$

で，f_1 は 1-コチェインとする．問 11.5 で定義された 1-コチェイン $f_1(i,j)$ を考える．新しい変換関数 $\tilde{t}'_{ij} \equiv \tilde{t}_{ij}f_1(i,j)$ を考えると，

$$\tilde{t}'_{ij}\tilde{t}'_{jk}\tilde{t}'_{ki} = [\delta f_1(i,j,k)]^2 = \mathbf{1}$$

を得るので，$\{\tilde{t}'_{ij}\}$ は M 上のスピン束を定める．■

有用な計算結果をいくつかのべる：

(a) $$w_1(\mathbb{C}P^m) = 1,\ w_2(\mathbb{C}P^m) = \begin{cases} 1 & m\text{ が奇数} \\ x & m\text{ が偶数} \end{cases} \tag{11.140}$$

で，x は $H^2(\mathbb{C}P^m;\mathbb{Z}_2)$ の生成元である．

(b) $$w_1(S^m) = w_2(S^m) = 1 \tag{11.141}$$

(c) $$w_1(\Sigma_g) = w_2(\Sigma_g) = 1 \tag{11.142}$$

ここに Σ_g は種数 g の Riemann 面である．

第 11 章への補足

コボルディズムと種数

原書では扱われていないが，幾何学的に大変重要な基礎概念である“コボルディズム (cobordism)”について触れておこう．これは本章でも登場した L 種数と $\hat{A}$ 種数 (Dirac 種数) を厳密に論じる際に，基本的役割を果たす概念でもある．

二つの向き付けられた n 次元閉多様体 M_1, M_2 が与えられたとき，ある向き付けられた境界をもつ $n+1$ 次元多様体 W^{n+1} が存在して

$$\partial W^{n+1} = M_1 \cup (-M_2)$$

を満たすとき，M_1 と M_2 は**同境**または**コボルダント** (cobordant) であるといい，$M_1 \overset{\text{cob}}{\sim} M_2$ とかくことにする．ただし，$-M_2$ とは M_2 の向きを反対[2]にしたものを表す．$\overset{\text{cob}}{\sim}$ は，向き付けられた n 次元閉多様体全体の集合 $\mathcal{M}^n$ の中で，同値関係を定めることが容易にわかる．この同値関係は分類としては少し粗いが，商集合 $\mathcal{M}^n/\overset{\text{cob}}{\sim}$ に群構造を与えるという意味で，大変有効である．これを $\Omega_n^{\text{SO}} = \mathcal{M}^n/\overset{\text{cob}}{\sim}$ とおいて，**n 次元コボルディズム群**という[3]．M^n の属するコボルディズム類を $[M^n]$ とかく．n 次元コボルディズム群の演算は，非交和（位相和）$[M_1^n] + [M_2^n] = [M_1^n \cup M_2^n]$ により与えられ，n 次元球面が属するコボルディズム類 $[S^n]$ が単位元（このとき，**零コボルダント**であるという）で，任意の $[M^n]$ に対して $[-M^n]$ が逆元になる．したがって，Ω_n^{SO} は可換群である．

さらに，矛盾無く定義される対応

$$\Omega_m^{\text{SO}} \times \Omega_n^{\text{SO}} \ni ([M^m], [N^n]) \mapsto [M^m \times N^n] \in \Omega_{m+n}^{\text{SO}}$$

を積演算として，$\Omega_*^{\text{SO}} = \Omega_0^{\text{SO}} \oplus \Omega_1^{\text{SO}} \oplus \Omega_2^{\text{SO}} \cdots$ は可換環になり，これを**コボルディズム環**とよぶ．

ところで，Ω_n^{SO} の群構造は計算可能で，(実はある空間のホモトピー群の計算に帰着され)

定理 11.A (R. Thom)
(i) $n \not\equiv 0 \pmod 4$ ならば，Ω_n^{SO} は $\mathbb{Z}_2$ の有限個の直和で，
(ii) $n \equiv 0 \pmod 4$ ならば，Ω_n^{SO} は $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_2$ の有限個の直和である

ことが成り立つ．そして，特に複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2m}$ のコボルディズム類が生成元をなすことが知られている．前章の補足の中でも 7 次元の場合に少し触れたことだが，例えば $\Omega_n^{\text{SO}} = 0$ は，向きづけられた n 次元閉多様体 M^n はすべて零コボルダント，すなわちある向きづけられた $n+1$ 次元多様体 W^{n+1} が必ず存在して，$\partial W^{n+1} = M^n$ となる．このような W^{n+1} は無数に存在し，一意ではないことに注意．

---

[2] $\overset{cob}{\sim}$ が推移律を満たすのを確かめる際に，向きが全体で矛盾無く定まるために $-M_2$ と逆に取っておく必要がある．

[3] 肩にある ‘SO’ という記号は，向き付け可能なカテゴリーを表す．それは，多様体の接束の構造群が (Riemann 計量を与えて) 回転群 SO(n) に簡約化されることを強調しているという意味合いが込められている．その意味で，コボルディズムを定義をする際に，向き付けを忘れた（向き付け不可能な場合も含めた）場合は，Ω_n^O とかくことが多い．これは，第 9 章の補足の後半で定めたものである．

さて，任意の n に対して Ω_n^{SO} に属する元を特定する方法は極めて簡明で，つぎに述べるように本章で扱った特性類が中心的役割を果たす：

定理 11.B (C. T. C. Wall)　$[M_1^n], [M_2^n] \in \Omega_n^{SO}$ に対して

$$[M_1^n] = [M_2^n] \quad \Leftrightarrow \quad \text{任意の } I, J \text{ に対して} \quad p_I(M_1^n) = p_I(M_2^n), w_J(M_1^n) = w_J(M_2^n)$$

が成り立つ．特に，M^n が零コボルダントであるための必要十分条件は，任意の I, J に対して

$$p_I(M^n) = 0, \quad w_J(M^n) = 0$$

となることである．

ただし，ここで $p_I(M^n), w_J(M^n)$ はそれぞれ M^n の **Pontrjagin 数**，**Stiefel-Whitney 数**とよばれるものである．この記号はきちんと説明しなくてはなるまい．

$n = 4m$ のとき，$I = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ を $i_1 + 2i_2 + \cdots + mi_m = 4m$ を満たす非負整数の列とする．このとき，$p_i = p_i(TM^n) \in H^{4i}(M^n; \mathbb{Z})$ とおいて

$$p_I(M^n) = \int_{M^n} (p_1)^{i_1} \cdots (p_m)^{i_m} \in \mathbb{Z}$$

と定める．$n \neq 4m$ のときは，$p_I(M^n) = 0$ と定めるのである．

Stiefel-Whitney 数の方は，積分で定義できないので Kronecker 積を用いる．M^n を必ずしも連結とは限らない向きづけられた n 次元閉多様体とするとき，**基本ホモロジー類**

$$[M^n] \in H_n(M^n; \mathbb{Z})$$

が一意的に定まる．このとき，任意のコホモロジー類 $u \in H^n(M^n; \mathbb{Z})$ に対して，同一視 $H^n(M^n; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_n(M^n; \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ を利用して，Kronecker 積

$$\langle u, [M^n] \rangle := u([M^n]) \in \mathbb{Z}$$

が定義できる（向きを考慮しない場合や向きづけ不可能な場合は係数を $\mathbb{Z}_2$ に簡約化して定める）．

$J = \{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$ を $j_1 + 2j_2 + \cdots + nj_n = n$ を満たす非負整数の列とする．このとき，$w_i = w_i(TM^n) \in H^i(M^n; \mathbb{Z}_2)$ とおいて

$$w_I(M^n) = \langle (w_1)^{j_1} \cdots (w_n)^{j_n}, [M^n] \rangle \in \mathbb{Z}_2$$

と定めるのである[4]．

さて，定理 11.B を標語的に述べると

> “コボルディズム類が一致するかどうかは，すべての Pontrjagin 数，Stiefel-Whitney 数が一致するかどうかで判定できる”

[4] このあたりの詳しいことは，
J. Milnor, J. Stasheff, Characteristic classes, Ann. of Math. Studies vol. 76, Princeton Univ. Press, 1974, の § 4 や § 15, 16, 17 を参照されたい．

となるだろう．すなわち，Pontrjagin 数，Stiefel-Whitney 数は コボルディズム不変量 なのである．ところで，(11.92), (11.96) によると L 種数や $\hat{A}$ 種数は，適当な Pontrjagin 数の有理係数一次結合で表されているのであった．したがって，L 種数や $\hat{A}$ 種数は,「コボルディズム環 Ω_*^{SO} から $\mathbb{Q}$ への環準同型写像の像」とみなすことができる．こうして，Hirzebruch によるつぎの極めて妥当な定義に到達することになる：環準同型写像

$$\varphi : \Omega_*^{\mathrm{SO}} \to \mathbb{Q}$$

が $\varphi([1]) = 1$ を満たすとき，**種数** (genus) という．

ところで種数は，いわゆる**対数** (logarithm)

$$g(x) = \int_0^x \sum_{n \geq 0} \varphi(\mathbb{C}P^{2n}) t^{2n} \mathrm{d}t$$

を定め，ベキ級数

$$f(x) = \frac{x}{g^{-1}(x)}$$

が種数を完全に特徴づけるのである（これを**特性的ベキ級数**とよぶ）．それでは，本章でも登場した L 種数や $\hat{A}$ 種数の特性的ベキ級数は，どのようにして決まるのだろうか？

さて，素粒子論における Edward Witten の問題提起に刺激を受けて，1980 年代後半に数学においても興味深い種数の族の発見がなされた．フランスの数学者 S. Ochanine は，$\delta, \varepsilon \in \mathbb{Q}$ に対して，対数が楕円積分

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}} \mathrm{d}t$$

で表されるような種数の族を**楕円種数** (elliptic genus) と名付け，その性質を調べ始めた．例えば，L 種数や $\hat{A}$ 種数は，楕円種数である．これを確かめてみよう．

まず，$\delta = \varepsilon = 1$ とすると

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1 - t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \tanh^{-1} x$$

を得るので，その特性ベキ級数は $f(x) = \dfrac{x}{\tanh x}$ となり，これが L 種数を定めるのである．

また，$\delta = -\frac{1}{8}, \varepsilon = 1$ とすると

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + \frac{1}{4} t^2} \mathrm{d}t = 2 \log \left(\frac{x}{2} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} \right)$$

を得るので，その特性ベキ級数は $f(x) = \dfrac{x/2}{\sinh(x/2)}$ となり，これが $\hat{A}$ 種数を定めるのである．

実は，楕円種数 φ に対して

$$\delta = \varphi(\mathbb{C}P^2), \quad \varepsilon = \varphi(\mathbb{H}P^2)$$

となることが知られている．

ところで，定義から推測されるように，楕円積分に関する種々の数論的考察が直接楕円種数の様々な興味深い性質としてフィードバックされる．そうした観点からの研究も精力的に進められているようであるが，そこまでの解説はこの補足の役割ではないから，これ以上立ち入らないことにする．興味を持たれた読者は

> P. S. Landweber (Ed.), Elliptic curves and modular forms in algebraic topology, Lecture Notes in Math. vol. 1326, 1988, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, NewYork, London, Paris, Tokyo.

を読破するとよい．そこに収められている E. Witten による Loop Space 上の Dirac 作用素の指数公式とアノマリーとの関連についての議論は，これから論ずる第13章と密接に関連して特に興味深い．

L 種数公式の初等的導出

前節で概観したように，L 種数は Pontrjagin 数の有理係数一次結合で表されるのであった．その際，L 種数公式は多様体の取り方にはよらず，特性ベキ級数から，もっと厳密に言うと Bernoulli 数から定まるものである．しかしここでは逆に，具体的に与えられた多様体の符号数から L 種数公式を決定する計算例を解説しよう．

計算を成功させるには，

- ▷ Pontrjagin 数が既知であり
- ▷ コボルディズム群の異なる生成元となる

ような多様体をうまく選ぶ必要がある．一般次元で行うのは煩雑なので，4次元と8次元に限定して紹介しよう．それを見れば高次元への議論の拡張は，容易に推察できよう．

さて，4次元では一般に自明とならない Pontrjagin 類は

$$p_1 \in H^4(M^4; \mathbb{Z})$$

のみであるから，$\Omega_4^{\mathrm{SO}} \cong \mathbb{Z}$ であり，複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ が生成元を与える．

ところで，一般の複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ について，$\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を生成元（すなわち，$\int_{\mathbb{C}P^n} \alpha^{2n} = 1$）とするとき

$$p_k(\mathbb{C}P^n) = \binom{n+1}{k} \alpha^{2k} \in H^{4k}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \tag{11.C}$$

であることが知られている（Milnor-Stasheff, p. 177 を参照）．したがって，4次元では

$$p_1(\mathbb{C}P^2) = 3\alpha^2 \tag{11.D}$$

となる．任意の向きづけられた4次元閉多様体 M^4 に対して，L 種数（符号数）は

$$\tau(M^4) = a \int_{M^4} p_1$$

の形であるから，(個々の多様体の取り方には依存しない) 係数 a を決定すればよい．第 7 章の補足でも既に触れたことだが，$H^2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であることから，階数 1 の非退化対称双一次形式の符号数は，向きの入れ方に気をつけて $\tau(\mathbb{C}P^2) = 1$ である．さらに (11.D) より

$$1 = \tau(\mathbb{C}P^2) = \int_{\mathbb{C}P^2} 3a\alpha^2 = 3a$$

であることがわかる．すなわち，$a = \dfrac{1}{3}$ であり，こうして本章 (11.92) の Hirzebruch 公式が裏付けられた．

続いて，8 次元の場合の議論を行おう．一般に自明とならない Pontrjagin 類は

$$p_1 \in H^4(M^8;\mathbb{Z}), \qquad p_2 \in H^8(M^8;\mathbb{Z})$$

の二つであるから，可能な Pontrjagin 数は

$$\int_{M^8} p_1^2, \qquad \int_{M^8} p_2$$

の二つだけである．また，$\Omega_8^{\mathrm{SO}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ が知られている（前掲 Milnor-Stasheff の § 17 を参照）．このとき，L 種数は

$$\tau(M^8) = a\int_{M^8} p_1^2 + b\int_{M^8} p_2 \tag{11.E}$$

の形をしているから，(多様体の取り方にはよらない) 係数 a と b を決定するため $\Omega_8^{\mathrm{SO}} \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ の異なる二つの生成元を選んでくる必要がある．一つは，複素 4 次元射影空間 $\mathbb{C}P^4$ でよい．もう一つは，例えば 4 元数射影空間 $\mathbb{H}P^2$ を選べばよい．

ところで一般に，n 次元 4 元数射影空間 $\mathbb{H}P^n$ の Pontrjagin 類は，生成元を $u \in H^4(\mathbb{H}P^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ とするとき，

$$1 + p_1 + p_2 + \cdots = \frac{(1+u)^{2n+2}}{1+4u}$$

となることが知られている[5]．したがって，8 次元では

$$p_1(\mathbb{H}P^2) = 2u, \qquad p_2(\mathbb{H}P^2) = 7u^2 \tag{11.F}$$

となる．$H^4(\mathbb{C}P^4;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H^4(\mathbb{H}P^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であることから，どちらも階数 1 の非退化対称双一次形式で，その符号数は，向きの入れ方に気をつけて $\tau(\mathbb{C}P^4) = \tau(\mathbb{H}P^2) = 1$ である．一方，(11.C) より

$$p_1(\mathbb{C}P^4) = 5\alpha^2, \qquad p_2(\mathbb{C}P^4) = 10\alpha^4$$

---

[5] 前掲 Milnor-Stasheff の書の演習問題 20.A である．最近この書の邦訳

『特性類講義』佐伯修・佐久間一浩訳（シュプリンガー・フェアラーク東京），2001 年

が出版された．そこには原書に無い演習問題の解答が収められている．尚，問題 20.A の（原書は u の取り方が逆なので訂正した）解答が 2 通り書かれているので参照されたい．

であるから，(11.E) に代入して

$$1 = \tau(\mathbb{C}P^4) = a\int_{\mathbb{C}P^2} 25\alpha^4 + b\int_{\mathbb{C}P^4} 10\alpha^4 = 25a + 10b$$

また，$\mathbb{H}P^2$ に対して，(11.F) を (11.E) に代入して

$$1 = \tau(\mathbb{H}P^2) = a\int_{\mathbb{H}HP^4} 4u^2 + b\int_{\mathbb{H}P^2} 7u^2 = 4a + 7b$$

を得る．連立方程式を解いて $a = -\dfrac{1}{45}$, $b = \dfrac{7}{45}$ を得るので，8 次元の公式

$$\tau(M^8) = \frac{1}{45}\int_{M^8}(-p_1^2 + 7p_2)$$

が得られたことになる．

こうした初等的で具体的な計算から L 種数公式が導出できてしまうことからも，“コボルディズム” の概念の基本的重要性が再認識されよう．[6]

[6] 尚，類似の方法論で $\hat{A}$ 種数公式も導き出せるが，それには “スピン・コボルディズム群” の概念とその生成元（例えば 4 次元では，K3 曲面），さらにはそれらの Pontrjagin 類の決定と Dirac 種数の計算が必要であり，L 種数の場合に較べてはるかに難しくなる．読者の演習としよう．

第12章　指数定理

物理学では，しばしば多様体 M 上の微分作用素を考察する．典型的な例は，ラプラシアン，d'Alembert 作用素，Dirac 作用素などである．これらの作用素は，数学的観点からは切断の空間の間の写像

$$D : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F)$$

と見なされる．ここで，E と F は M 上のベクトル束である．例えば，Dirac 作用素は写像 $\Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$ で，E は M 上のスピン束である．E と F 上に内積が定義されれば，D の随伴

$$D^\dagger : \Gamma(M, F) \to \Gamma(M, E)$$

が定義できる．

D は微分作用素なので，スペクトルと縮退に関する解析的情報をもたらす．以下では，D と $D^\dagger$ のゼロ固有値

$$\ker D \equiv \{s \in \Gamma(M, E) | Ds = 0\}$$

$$\ker D^\dagger \equiv \{s \in \Gamma(M, E) | D^\dagger s = 0\}$$

を考察の対象とする．解析的指数は，

$$\text{ind } D = \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger$$

によって定義される．驚いたことに，この解析的な量は，M 上の適当な特性類の積分により表される位相不変量であり，純粋に M の位相的な情報を与える．この解析とトポロジーの間の相互作用が指数定理の主要な部分である．

これから述べる概説は，Eguchi 他 (1980)，Gilkey(1984)，Shanahan(1978)，Kulkarni(1975)，Booss and Bleecker(1985) などに従う．詳細に関しては，読者はこれらの参考文献にあたられたい．Alvarez(1985) には，この話題の簡単な概説がアノマリーと弦理論への応用と共に書かれている．

12.1　楕円型作用素と Fredholm 作用素

以下では，境界をもたないコンパクトな多様体 M 上のベクトル束上で定義される微分作用素に関心をはらう．特に，Fredholm 作用素とよばれる微分作用素の‘良い’クラスを中心に扱う．

12.1.1 楕円型作用素

E と F を，多様体 M 上の複素ベクトル束とする．微分作用素とは線形写像

$$D : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F) \tag{12.1}$$

のことである．E と F がその上で自明となるような，M のチャート U をとる．つぎのような多重指数の記号を導入する

$$M \equiv (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \quad \mu_j \in \mathbb{Z}, \mu_j \geq 0$$

$$|M| \equiv \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m$$
$$D_M = \frac{\partial^{|M|}}{\partial x^M} \equiv \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_m}}{\partial (x^1)^{\mu_1} \dots \partial (x^m)^{\mu_m}}$$

$\dim E = k$, $\dim F = k'$ ならば，D の最も一般的な形は

$$[Ds(x)]^\alpha = \sum_{\substack{|M| \leq N \\ 1 \leq a \leq k}} A^{M\alpha}{}_a(x) D_M s^a(x) \qquad 1 \leq \alpha \leq k' \tag{12.2}$$

である．ここで，$s(x)$ は E の切断である．x をその座標が x^μ である点を表す．この記号の若干の乱用は，記述を簡明化する．$A^M \equiv (A^M)^\alpha{}_a$ は位置 x に依存する $k \times k'$ 行列である．(12.2) における正の自然数 N は D の**階数**とよばれる．我々が興味があるのは，$N = 1$ (Dirac 作用素) と $N = 2$ (ラプラシアン) の場合である．例えば，E を M 上のスピン束とすれば，Dirac 作用素 $D \equiv \mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu + m : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$ は E の切断 $\psi(x)$ に

$$[D\psi(x)]^\alpha = \mathrm{i}(\gamma^\mu)^\alpha{}_\beta \partial_\mu \psi^\beta(x) + m\psi^\alpha(x)$$

のように作用する．

$k \times k'$ 行列

$$\sigma(D, \xi) \equiv \sum_{|M| = N} A^{M\alpha}{}_a(x) \xi_M \tag{12.3}$$

を D の**表象**という．ξ は m 個の実数の組 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ である．表象は，座標の取り方に独立に定義することもできる．$E \xrightarrow{\pi} M$ をベクトル束とし，$p \in M$, $\xi \in T_p^* M$, $s \in \pi_E^{-1}(p)$ とする．切断 $\tilde{s} \in \Gamma(M, E)$ を $\tilde{s}(p) = s$ を満たすように，また関数 $f \in \mathcal{F}(M)$ を $f(p) = 0$, $\mathrm{d}f(p) = \xi \in T_p^* M$ を満たすようにとる．このとき，表象を

$$\sigma(D, \xi) s = \frac{1}{N!} D(f^N \tilde{s})|_p \tag{12.4}$$

と定義することもできる．因子 f^N は，条件 $f(p) = 0$ にしたがい自動的に N 次の項を取り出すとする．(12.4) は，(12.3) と同じ表象を与えている．

行列 $\sigma(D, \xi)$ が各 $x \in M$ と $\xi \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ に対して逆をもつならば，作用素 D は**楕円型**であるとよばれる．明らかに，この定義は $k = k'$ のときのみ意味をなす．合成作用素 $D = D_1 D_2$ の表象は，表象の合成すなわち $\sigma(D, \xi) = \sigma(D_1, \xi)\sigma(D_2, \xi)$ であることを注意しておくべきであろう．これはまた楕円型作用素の合成も楕円型であることを示している．一般に，楕円型作用素の巾や根号をとっても再び楕円型となる．

例 12.1 x^μ を $\mathbb{R}^m$ における自然な座標とする．E と F を $\mathbb{R}^m$ 上の実直線束とするとき，ラプラシアン $\Delta : \Gamma(\mathbb{R}^m, E) \to \Gamma(\mathbb{R}^m, F)$ は

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial(x^m)^2} \tag{12.5}$$

によって定義される．(12.3) によれば，その表象は

$$\sigma(\Delta, \xi) = \sum_\mu (\xi_\mu)^2$$

である．これは，(12.4) から得られる結果ともつぎのように一致する

$$\begin{aligned}\sigma(\Delta,\xi)s &= \frac{1}{2}\Delta(f^2\tilde{s})|_p = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial(x^\mu)^2}(f^2\tilde{s})|_p \\ &= \frac{1}{2}\left(f^2\Delta\tilde{s} + 2f\Delta f\tilde{s} + 2f\sum \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial \tilde{s}}{\partial x^\mu} + 2\sum \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\tilde{s}\right)\Bigg|_p \\ &= \sum(\xi_\mu)^2 s\end{aligned}$$

この表象は $\xi \neq 0$ に対して，明らかに逆をもつので Δ は楕円型である．

一方，d'Alembert 作用素

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial(x^{m-1})^2} - \frac{\partial^2}{\partial(x^m)^2} \tag{12.6}$$

は楕円型ではない．というのはその表象

$$\sigma(\Box, \xi) = (\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^{m-1})^2 - (\xi^m)^2$$

は光円錐

$$(\xi^m)^2 = (\xi^1)^2 + \ldots + (\xi^{m-1})^2$$

上至る所でゼロとなるからである．

問 12.1 $M = \mathbb{R}^2$ とし，その上で階数 2 の微分作用素 D を考える．D の表象は

$$\sigma(D, \xi) = A_{11}\xi^1\xi^1 + 2A_{12}\xi^1\xi^2 + A_{22}\xi^2\xi^2$$

という形をしている．このとき，D が楕円型であるための必要十分条件は $\sigma(D,\xi) = 1$ が ξ-空間の楕円となることを示せ．

12.1.2 Fredholm 作用素

$\Delta : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F)$ を楕円型作用素とする．D の核はゼロ固有ベクトルの集合

$$\ker D \equiv \{s \in \Gamma(M, E) | Ds = 0\} \tag{12.7}$$

である．E と F にはファイバー計量が与えられていると仮定し，それらを各々$\langle\ ,\ \rangle_E$, $\langle\ ,\ \rangle_F$ と表すことにしよう．D の随伴 $\Delta^\dagger : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, F)$ は

$$\langle s', Ds\rangle_F \equiv \langle D^\dagger s', s\rangle_E \tag{12.8}$$

によって定義される．ここで $s\in\Gamma(M,E)$, $s'\in\Gamma(M,F)$ である．D の**余核**を

$$\mathrm{coker}D\equiv\Gamma(M,F)/\mathrm{im}D \tag{12.9}$$

によって定義する．

楕円型作用素の中で，我々は核と余核が有限次元になる作用素のクラスに関心がある．この条件を満たす楕円型作用素のことを **Fredholm 作用素**とよぶ．また，その**解析的指数**

$$\mathrm{ind}D\equiv\dim\ker D-\dim\mathrm{coker}D \tag{12.10}$$

は Fredholm 作用素に対して定義可能である．その理由で，Fredholm 作用素のみが考察の対象となる．微分作用素に関する一般論から，コンパクト多様体上の楕円型作用素は Fredholm 作用素であることが知られている．つぎの定理 12.1 から ind$D$ は

$$\mathrm{ind}D=\dim\ker D-\dim\ker D^\dagger \tag{12.11}$$

とも表されることがわかる．

定理 12.1 $\Delta:\Gamma(M,E)\to\Gamma(M,F)$ を Fredholm 作用素とする．このとき，

$$\mathrm{coker}D\cong\ker D^\dagger\equiv\{s\in\Gamma(M,F)|D^\dagger s=0\} \tag{12.12}$$

が成り立つ．

証明： $[s]\in\mathrm{coker}D$ が

$$[s]=\{s'\in\Gamma(M,F)|s'=s+Du,u\in\Gamma(M,E)\}$$

で与えられるとする．このとき，全射 $\mathrm{ker}D^\dagger\to\mathrm{coker}D$ が存在する，すなわち任意の $[s]\in\mathrm{coker}D$ は代表元 $s_0\in\mathrm{ker}D$ をもつことを示そう．s_0 を

$$s_0\equiv s-D\frac{1}{D^\dagger D}D^\dagger s \tag{12.13}$$

と定義する．$D^\dagger s_0=D^\dagger s-D^\dagger D(D^\dagger D)^{-1}D^\dagger s=D^\dagger s-D^\dagger s=0$ なので，$s_0\in\mathrm{ker}D^\dagger$ がわかる．つぎに，$s_0\neq s_0'\in\mathrm{ker}D^\dagger$ とする．このとき，$\Gamma(M,F)/\mathrm{im}D$ の中で $[s_0]\neq[s_0']$ であることを示そう．$[s_0]=[s_0']$ ならば，ある元 $u\in\Gamma(M,E)$ が存在して $s_0-s_0'=Du$ を満たす．このとき，$0=\langle u,D^\dagger(s_0-s_0')\rangle_E=\langle u,D^\dagger Du\rangle_E=\langle Du,Du\rangle_F\geq0$ となるので，$Du=0$ を得るがこれは $s_0\neq s_0'$ とした仮定に矛盾する．したがって，写像 $s_0\mapsto[s]$ は全単射であるから，$\mathrm{coker}D\cong\mathrm{ker}D^\dagger$ が得られたことになる．■

12.1.3 楕円型複体

Fredholm 作用素の系列

$$\ldots\to\Gamma(M,E_{i-1})\xrightarrow{D_{i-1}}\Gamma(M,E_i)\xrightarrow{D_i}\Gamma(M,E_{i+1})\xrightarrow{D_{i+1}}\ldots \tag{12.14}$$

を考えよう．ここで $\{E_i\}$ はコンパクト多様体 M 上のベクトル束の列である．列 (E_i, D_i) は，任意の i に対して冪零，すなわち $D_i D_{i-1} = 0$ が成り立つとき，**楕円型複体**とよばれる．$\Gamma(M, E_i) = \Omega_i(M)$, $D_i = \mathrm{d}$（外積）は典型例である．$D_i : \Gamma(M, E_i) \to \Gamma(M, E_{i+1})$ の随伴作用素は

$$D^{\dagger}{}_i : \Gamma(M, E_{i+1}) \to \Gamma(M, E_i)$$

で表される．ラプラシアン $\Delta_i : \Gamma(M, E_i) \to \Gamma(M, E_i)$ は

$$\Delta_i \equiv D_{i-1} D^{\dagger}{}_{i-1} + D^{\dagger}{}_i D_i \tag{12.15}$$

で定義される．Hodge 分解は今の場合にも適用される：

$$s_i = D_{i-1} s_{i-1} + D^{\dagger}{}_i s_{i+1} + h_i \tag{12.16}$$

ここで $s_{i\pm 1} \in \Gamma(M, E_{i\pm 1})$ であり，h_i は Δ_i の核である; $\Delta_i h_i = 0$.

de Rham コホモロジー群の類似で

$$H^i(E, D) \equiv \ker D_i / \mathrm{im} D_{i-1} \tag{12.17}$$

と定める．de Rham 理論の場合と同じように，$H^i(E, D)$ は Δ_i の核に同型であることが示される．したがって，

$$\dim H^i(E, D) = \dim \mathrm{Harm}^i(E, D) \tag{12.18}$$

を得る．ここで $\mathrm{Harm}^i(E, D)$ は $\{h_i\}$ で張られるベクトル空間である．この楕円型複体の**指数**は

$$\mathrm{ind} D \equiv \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim H^i(E, D) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \dim \ker \Delta_i \tag{12.19}$$

で定義される．こうして定義された指数は，Euler 標数の一般化になっている；後で見る例 12.2 を参照．

この定義と (12.10) はどのように関連づけられるだろうか？　複体 $\Gamma(M, E) \xrightarrow{D} \Gamma(M, F)$ を考えよう．形式的に両側にゼロを付け加えると

$$0 \xrightarrow{i} \Gamma(M, E) \xrightarrow{D} \Gamma(M, F) \xrightarrow{\varphi} 0 \tag{12.20}$$

である．ここで i は包含写像である．(12.19) による指数は

$$\dim \ker D - \{\dim \Gamma(M, F) - \dim \mathrm{im} D\} = \dim \ker D - \dim \mathrm{coker} D$$

となる．ここでは，$\dim \mathrm{im} i = 0$, $\ker \varphi = \Gamma(M, F)$, $\mathrm{coker} D = \ker \varphi / \mathrm{im} D$ であることに注意しておこう．したがって，(12.19) は (12.10) の定義と同じ指数を与える．

しばしば便利なのが，もともとの楕円型複体 (E, D) と同じ指数をもつ 2 項の楕円型複体を用いることである．この まとめ上げ は

$$E_+ \equiv \bigoplus_r E_{2r}, \quad E_- \equiv \bigoplus_r E_{2r+1} \tag{12.21}$$

と定義することによってうまくいくが，それぞれを**偶数束**と**奇数束**とよぶ．それに対応して，作用素

$$A \equiv \bigoplus_r (D_{2r} + D^\dagger{}_{2r-1}),\ A^\dagger \equiv \bigoplus_r (D_{2r+1} + D^\dagger{}_{2r}) \tag{12.22}$$

を考えよう．$A : \Gamma(M, E_+) \to \Gamma(M, E_-)$ で，$A^\dagger : \Gamma(M, E_-) \to \Gamma(M, E_+)$ であることを簡単に確かめよう．A と $A^\dagger$ の定義から，2 つのラプラシアン

$$\Delta_+ \equiv A^\dagger A = \oplus_{r,s} (D_{2r+1} + D^\dagger{}_{2r})(D_{2s} + D^\dagger{}_{2s-1})$$

$$= \oplus_r (D_{2r-1} D^\dagger{}_{2r-1} + D^\dagger{}_{2r} D_{2r}) = \oplus_r \Delta_{2r} \tag{12.23a}$$

$$\Delta_- \equiv AA^\dagger = \oplus_r \Delta_{2r+1} \tag{12.23b}$$

を構成する．すると，

$$\mathrm{ind}(E_\pm, A) = \dim\ker\Delta_+ - \dim\ker\Delta_-$$

$$= \sum (-1)^r \dim\ker\Delta_r = \mathrm{ind}(E, D) \tag{12.24}$$

を得る．

例 12.2 境界をもたないコンパクト多様体 M 上の **de Rham 複体** $\Omega^*(M)$ を考えよう：

$$0 \xrightarrow{i} \Omega^0(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^m(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} 0 \tag{12.25}$$

ここで $m = \dim M$ で，d は $\mathrm{d}_r : \Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ を表す．(12.25) で定義される $H^r(E, D)$ は，de Rham コホモロジー群 $H^r(M, \mathbb{R})$ と一致する．その指数は Euler 標数に他ならない：

$$\mathrm{ind}(\Omega^*(M), \mathrm{d}) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \dim H^r(M; \mathbb{R}) = \chi(M) \tag{12.26}$$

第 7 章では，$b^r \equiv \dim H^r(M, \mathbb{R})$ が一次独立な調和 r-形式の個数と一致することを求めた; $\dim H^r(M, \mathbb{R}) = \dim \mathrm{Harm}^r(M) = \dim \ker\Delta_r$，ここで Δ_r はラプラシアン

$$\Delta_r = (\mathrm{d} + \mathrm{d}^\dagger)^2 = \mathrm{d}_{r-1}\mathrm{d}^\dagger{}_{r-1} + \mathrm{d}^\dagger{}_r \mathrm{d}_r \tag{12.27}$$

$\mathrm{d}_r^\dagger : \Omega^{r+1}(M) \to \Omega^r(M)$ は d_r の随伴である．さて，

$$\chi(M) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \dim\ker\Delta_r \tag{12.28}$$

であることを確かめよう．これが大変興味深いのは，左辺は M を三角形分割して計算される純粋に位相的な量であるのに対して，右辺は例えば解析的な方程式 $\Delta_r u = 0$ の解によって決まる量であるからである．例 11.6 で，$\chi(M)$ は M 上で Euler 類を積分することによって与えられることを注意した；$\chi(M) = \int_M e(TM)$．すると，(12.28) は

$$\sum_{r=1}^{m} (-1)^r \dim\ker\Delta_r = \int_M e(TM) \tag{12.29}$$

と読み替えられる．これが指数定理の典型的な形である．左辺が解析的指数であり，右辺はある特性類を積分することによって与えられる位相的指数である．§ 12.3 では，Atiyah-Singer の指数定理から (12.29) 式を導き出す．

2 項複体は

$$\Omega^+(M) \equiv \bigoplus_r \Omega^{2r}(M) \quad \Omega^-(M) \equiv \bigoplus_r \Omega^{2r+1}(M) \tag{12.30}$$

で与えられる．それに対応する作用素は

$$A \equiv \bigoplus_r (\mathrm{d}_{2r} + \mathrm{d}^\dagger{}_{2r-1}) \quad A^\dagger \equiv \bigoplus_r (\mathrm{d}_{2r-1} + \mathrm{d}^\dagger{}_{2r}) \tag{12.31}$$

である．読者の演習として，つぎの等式

$$\mathrm{ind}(\Omega^\pm(M), A) = \dim\ker A_+ - \dim\ker A_- = \chi(M) \tag{12.32}$$

を残しておこう．

12.2 Atiyah-Singer の指数定理

12.2.1 定理の記述

定理 12.2 (Atiyah-Singer の指数定理) (E, D) を境界をもたない m 次元コンパクト多様体 M 上の楕円型複体とする．この複体の指数は

$$\mathrm{ind}(E, D) = (-1)^{m(m+1)/2} \int_M \mathrm{ch}\left(\bigoplus_r (-1)^r E_r\right) \left.\frac{\mathrm{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)}\right|_{\mathrm{vol}} \tag{12.33}$$

で与えられる．右辺の被積分関数からは，積分が意味をもつように m-形式のみを取り出す．[注：$e(TM)$ による割り算は形式的な意味で行われる．m が奇数ならば，下でみるように指数は恒等的にゼロである．原論文は，Atiyah and Singer (1968a, b), Atiyah and Segal (1968) である．]

定理 12.2 の証明は，Shanahan (1978), Palais (1965), Gilkey (1984) の中に見られる．そこで見られる証明は，K 理論あるいは熱核の方法に基づいている．§ 13.2 で，スピン複体に対する Atiyah-Singer(AS) の指数定理の最も簡単なヴァージョンの証明を与える．

最近，物理学者たちは超対称性を用いた指数定理の別証明を発見した．興味のある読者は，Alvarez-Gaume (1983) または Friedan and Windey (1984, 85) を参照されたい．[1]

つぎの系は，定理 12.2 の直接の帰結である．

系 12.1 $\Gamma(M, E) \xrightarrow{D} \Gamma(M, F)$ を 2 項複体とする．D の指数は

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}D &= \dim\ker D - \dim\ker D^\dagger \\ &= (-1)^{m(m+1)/2} \int_M (\mathrm{ch}E - \mathrm{ch}F) \left.\frac{\mathrm{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)}\right|_{\mathrm{vol}}\end{aligned} \tag{12.34}$$

で与えられる．

[1] 中原幹夫「経路積分とその応用」(東京大学数理科学セミナリーノート 15) (1998) に，超対称量子力学を用いた指数定理の証明をやさしく解説した．

12.3 de Rham 複体

M を境界をもたない m 次元のコンパクトで向き付け可能な多様体とする．ここまで，de Rham 複体にはだいぶ慣れしたんできた：

$$\ldots \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{r-1}(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{r}(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{r+1}(M)^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \ldots \tag{12.35}$$

ここに，$\Omega^r(M)^{\mathbb{C}} = \Gamma(M, \Lambda^r T^*M^{\mathbb{C}})$ である．そこで，AS 指数定理を適用できるように微分形式を複素化する．外微分は，$\mathrm{d}^2 = 0$ を満たす．(12.35) が楕円型複体であることを示すために，d が楕円型であることを示さなくてはならない．d に関する表象を求めるために

$$\sigma(\mathrm{d}, \xi)\omega = \mathrm{d}(f\tilde{s})|_p = \mathrm{d}f \wedge \tilde{s} + f\mathrm{d}\tilde{s}|_p = \xi \wedge \omega$$

に注意する．ここで，$p \in M$, $\omega \in \Omega_p^r(M)^{\mathbb{C}}$, $f(p) = 0$, $\mathrm{d}f(p) = \xi$, $\tilde{s} \in \Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$, $\tilde{s}(p) = \omega$ である；(12.4) を参照．よって

$$\sigma(\mathrm{d}, \xi) = \xi \wedge \tag{12.36}$$

が求まる．これは写像 $\Omega^r(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^{r+1}(M)^{\mathbb{C}}$ を定め，$\xi \neq 0$ ならば非特異である．したがって，$\mathrm{d} : \Omega^r(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^{r+1}(M)^{\mathbb{C}}$ は楕円型であり，(12.35) が楕円型複体であることを示したことになる．

この複体に対する指数定理を求めよう．$\dim_{\mathbb{C}} H^r(M;\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{R}} H^r(M;\mathbb{R})$ であることに注意する．ゆえに，解析的指数は

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}\, \mathrm{d} &= \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \dim_{\mathbb{C}} H^r(M;\mathbb{C}) \\ &= \sum (-1)^r \dim_{\mathbb{R}} H^r(M;\mathbb{R}) = \chi(M)\end{aligned} \tag{12.37}$$

である．ここで $\chi(M)$ は M の Euler 標数である．そこで，M が偶数次元であると仮定しよう $(m = 2l)$．(12.33) の右辺は位相的指数を与える．

$$(-1)^{l(2l+1)} \int_M \mathrm{ch}\left(\bigoplus_{r=0}^{m} (-1)^r \wedge^r T^*M^{\mathbb{C}}\right) \left.\frac{\mathrm{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)}\right|_{\mathrm{vol}} \tag{12.38}$$

分解原理により

$$\begin{aligned}&\mathrm{ch}\left(\bigoplus_{r=0}^{m} (-1)^r \wedge^r T^*M^{\mathbb{C}}\right) \\ &= 1 - \mathrm{ch}(T^*M^{\mathbb{C}}) + \mathrm{ch}(\wedge^2 T^*M^{\mathbb{C}}) + \ldots + (-1)^m \mathrm{ch}(\wedge^m T^*M^{\mathbb{C}}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{-x_i}(TM^{\mathbb{C}}) + \sum_{i<j} \mathrm{e}^{-x_i}\mathrm{e}^{-x_j}(TM^{\mathbb{C}}) + \ldots \\ &\quad + (-1)^m \mathrm{e}^{-x_1}\mathrm{e}^{-x_2}\ldots\mathrm{e}^{-x_m}(TM^{\mathbb{C}}) \\ &= \prod_{i=1}^{m} (1 - \mathrm{e}^{-x_i})(TM^{\mathbb{C}})\end{aligned}$$

となる．ここで $x_i(T^*M^{\mathbb{C}}) = -x_i(TM^{\mathbb{C}})$ であることに注意しておく．[L を複素直線束，L^* をその双対束とする．$L \otimes L^*$ は，その切断が L の各ファイバーにおいて写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ となるファイバー束である．$L \otimes L^*$ は至る所ゼロとならない大域的切断（例えば，恒等写像）をもつので，自明束であることが示せる．よって，$c_1(L \otimes L^*) = c_1(L) + c_1(L^*) = 0$ だから $x(L^*) = -x(L)$ を得る．したがって，分解原理により，$x_i(T^*M^{\mathbb{C}}) = -x_i(TM^{\mathbb{C}})$ となる．] また

$$\mathrm{Td}(TM^{\mathbb{C}}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{x_i}{1 - \mathrm{e}^{-x_i}}(TM^{\mathbb{C}})$$

$$e(TM) = \prod_{i=1}^{l} x_i(TM^{\mathbb{C}})$$

を得る．これらを (12.38) に代入して

$$\mathrm{ind}\,\mathrm{d} = \int_M (-1)^{l(2l+1)}(-1)^l \left(\prod_{i=1}^{l} x_i(TM^{\mathbb{C}}) \right) = \int_M e(TM) \tag{12.39}$$

を得る．

m が奇数ならば，(Shanahan (1978), p. 22) にあるように

$$\mathrm{ind}\,\mathrm{d} = 0 \tag{12.40}$$

が示されるが，これは $\dim M$ が奇数ならば $e(TM) = 0$ である事実と一致する．いずれにしても，de Rham 複体に対する指数定理は

$$\chi(M) = \int_M e(TM) \tag{12.41}$$

となる．

例 **12.3** M を境界をもたない 2 次元向き付け可能多様体とする．(12.41) を読み替えると

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi} \int_M \varepsilon^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_M \mathcal{R}_{12} \tag{12.42a}$$

となるが，これは有名な **Gauss-Bonnet の定理**である．$\dim M = 4$ ならば

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2} \int_M \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{R}_{\alpha\beta} \wedge \mathcal{R}_{\gamma\delta} \tag{12.42b}$$

となる．

12.4 Dolbeault 複体

複素多様体に関するいくつかの初等的事実を思い出そう（詳しくは，第 I 分冊の 8 章を参照）．M を境界をもたない複素次元 m のコンパクト複素多様体とする．$z^\mu = x^\mu + \mathrm{i}y^\mu$ を局所座標，$\bar{z}^\mu = x^\mu - \mathrm{i}y^\mu$ をその複素共役とする．TM^+ を $\{\partial/\partial z^\mu\}$ で張られる接束で，$TM^- = \overline{TM^+}$ を $\{\partial/\partial \bar{z}^\mu\}$ で張られるその複素共役束とする．TM^+ の双対束を T^*M^+ で

表し，それは $\{\mathrm{d}z^\mu\}$ で張られる．TM^- の双対束は $\{\mathrm{d}\bar{z}^\mu\}$ で張られる $T^*M^- = \overline{T^*M^+}$ である．複素化された r-形式の空間 $\Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$ は，

$$\Omega^r(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M)$$

と分解される．ここで $\Omega^{p,q}(M)$ は，(p,q)-形式全体の空間で

$$\mathrm{d}z^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p} \wedge \mathrm{d}\bar{z}^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\bar{z}^{\nu_q}$$

の形の基底により張られるベクトル空間である．外微分は $\mathrm{d} \equiv \partial + \bar{\partial}$ と分解されるが，ここで

$$\partial = \mathrm{d}z^\mu \wedge \partial/\partial z^\mu, \quad \bar{\partial} = \mathrm{d}\bar{z}^\mu \wedge \partial/\partial \bar{z}^\mu$$

である．また，これらは $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ を満たす．このとき，系列

$$\ldots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,q}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,q+1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \ldots \tag{12.43a}$$

$$\ldots \xrightarrow{\partial} \Omega^{p,q}(M) \xrightarrow{\partial} \Omega^{p+1,q}(M) \xrightarrow{\partial} \ldots \tag{12.43b}$$

を得る．我々が興味があるのは，最初の系列で $p=0$ の場合の

$$\ldots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,q}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,q+1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \ldots \tag{12.44}$$

である．この系列は **Dolbeault 複体**とよばれる．

(12.44) が楕円型複体であることを示すには，$\bar{\partial}$ に関する表象を計算しなくてはならない．$\xi = \xi^{1,0} + \xi^{0,1}$ を点 $p \in M$ における実 1-形式で，$\xi^{0,1} \in \Omega^{0,1}_p(M)$ であり，

$$\xi^{1,0} = \overline{\xi^{0,1}} \in \Omega^{1,0}_p(M)$$

とする．反正則 r-形式 $\omega \in \Omega^{0,r}(M)$ をとる．このとき，

$$\sigma(\bar{\partial}, \xi)\omega = \bar{\partial}(f\tilde{s}) = \bar{\partial}f \wedge \tilde{s} + f\bar{\partial}\tilde{s}|_p = \xi^{0,1} \wedge \omega$$

である．ここで $f(p) = 0$, $\bar{\partial}f(p) = \xi^{0,1}$, $\tilde{s} \in \Omega^{0,r}(M)$, $\tilde{s}(p) = \omega$ である．したがって，

$$\sigma(\bar{\partial}, \xi) = \xi^{0,1} \wedge \tag{12.45}$$

を得る．前節で与えたものと類似の議論から，表象 (12.45) は楕円型であることが示される．こうして，Dolbeault 複体 (12.44) は楕円型複体であることがわかった．

すると，AS 指数定理は

$$\mathrm{ind}\, \bar{\partial} = \int_M \mathrm{ch}\left(\sum_r (-1)^r \wedge^r T^*M^-\right) \left.\frac{\mathrm{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)}\right|_{\mathrm{vol}} \tag{12.46}$$

という形を取ることになる．左辺はつぎのように計算される．最初に，

$$\ker \bar{\partial}_r / \mathrm{im} \bar{\partial}_{r-1} = H^{0,r}(M)$$

に注意する．ただし，$H^{0,r}(M)$ は $\bar{\partial}$-コホモロジー群である．このとき，左辺は

$$\text{ind } \bar{\partial} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r b^{0,r} \tag{12.47}$$

となる．ここに $b^{0,r} \equiv \dim_{\mathbb{C}} H^{0,r}(M)$ は Hodge 数である．この指数は，M の**算術種数**とよばれる．

位相的指数の簡略化は，de Rham 複体の場合と同様に実行される．技術的詳細に関しては，Shanahan(1978) を参照されたい．その結果，

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^r b^{0,r} = \int_M \text{Td}(TM^+) \tag{12.48}$$

を得るが，ここで $\text{Td}(TM^+)$ は TM^+ の Todd 類である．

12.4.1 捻れ Dolbeault 複体と Hirzebruch-Riemann-Roch 定理

V を M 上の正則ベクトル束とすると，Dolbeault 複体における $\Omega^{0,r}(M)$ をテンソル積束 $\Omega^{0,r}(M)\otimes V$ で置き換えることができる：

$$\ldots \xrightarrow{\bar{\partial}_V} \Omega^{0,r-1}(M)\otimes V \xrightarrow{\bar{\partial}_V} \Omega^{0,r}(M)\otimes V \xrightarrow{\bar{\partial}_V} \ldots \tag{12.49}$$

この複体の AS の指数定理は，**Hirzebruch-Riemann-Roch の定理**

$$\text{ind } \bar{\partial}_V = \int_M \text{Td}(TM^+)\text{ch}(V) \tag{12.50}$$

に帰着する．

例えば，$m = \dim_{\mathbb{C}} M = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \text{ind}\bar{\partial}_V &= \frac{1}{2}\dim V \int_M c_1(TM^+) + \int_M c_1(V) \\ &= (2-g)\dim V + \int_M \frac{\text{i}\mathcal{F}}{2\pi} \end{aligned} \tag{12.51}$$

が得られる．ここで，g を M の種数とするとき

$$\int_M c_1(TM^+) = \int_M e(TM) = (2-g)$$

が成り立つことを用いた．

12.5 符号数複体

12.5.1 Hirzebruch の符号数

M を偶数次元 $(m = 2l)$ のコンパクトで向き付け可能な多様体とする．$[\omega]$ と $[\eta]$ を‘中間次元’のコホモロジー群 $H^l(M;\mathbb{R})$ の元とする．そこで，双一次形式 $H^l(M;\mathbb{R})\times H^l(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を

$$\sigma([\omega],[\eta]) \equiv \int_M \omega\wedge\eta \tag{12.52}$$

で定義する．例 11.8 と見比べよ．この定義は，$[\omega]$ と $[\eta]$ の代表元の選び方にはよらない．σ は，l が偶数（$m \equiv 0 \pmod 4$）ならば対称，l が奇数（$m \equiv 2 \pmod 4$）ならば反対称である．Poincaré 双対定理から，双一次形式 σ は極大階数 $b^l = \dim H^l(M;\mathbb{R})$ をもち，それゆえ非退化[2]である．$l \equiv 2k$ ならば，対称形式 σ の固有値はすべて実数であるが，そのうち正の固有値の個数を b^+, 負の固有値の個数を b^- とする（$b^+ + b^- = b^l$）．**Hirzebruch の符号数**を

$$\tau(M) \equiv b^+ - b^- \tag{12.53}$$

によって定義する．l が奇数のときは，$\tau(M)$ はゼロと定義する（反対称形式は純虚数の固有値をもつことに注意）．そこで，以下は $l = 2k$ とおく．

Hodge $*$ は，$4k$ 次元多様体 M において $2k$-形式に作用するとき，$*^2 = 1$ を満たすから，$*$ の固有値は ± 1 である．$\mathrm{Harm}^{2k}(M)$ を M 上の調和 $2k$-形式全体の集合とする．$\mathrm{Harm}^{2k}(M) \cong H^{2k}(M;\mathbb{R})$ で，$H^{2k}(M;\mathbb{R})$ の各元は一意に定まる調和形式を代表元にもつことに注意する．$\mathrm{Harm}^{2k}(M)$ は，$*$ の固有値の符号にしたがい二つの部分空間の直和に分かれる．

$$\mathrm{Harm}^{2k}(M) = \mathrm{Harm}^{2k}_+(M) \oplus \mathrm{Harm}^{2k}_-(M) \tag{12.54}$$

この分離により，双一次形式 σ はブロック対角化される．実際，$\omega^\pm \in \mathrm{Harm}^{2k}_\pm(M)$ に対して

$$\sigma(\omega^+, \omega^+) = \int_M \omega^+ \wedge \omega^+ = \int_M \omega^+ \wedge *\omega^+ = (\omega^+, \omega^+) > 0$$

であるが，ここで (ω^+, ω^+) は (7.181) で定義される標準的な正定値内積である．さらに，また

$$\sigma(\omega^-, \omega^-) = -\int_M \omega^- \wedge *\omega^- = -(\omega^-, \omega^-) < 0$$

$$\sigma(\omega^+, \omega^-) = -\int_M \omega^+ \wedge *\omega^- = -\int_M \omega^- \wedge *\omega^+ = -\sigma(\omega^+, \omega^-) = 0$$

が得られる．ここで任意の $\alpha, \beta \in \mathrm{Harm}^{2k}(M)$ に対して，$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha$ が成り立つことを用いた．ゆえに，σ は直和分解 $\mathrm{Harm}^{2k}_+(M) \oplus \mathrm{Harm}^{2k}_-(M)$ に関して，ブロック対角化され，さらに $b^\pm = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Harm}^{2k}_\pm(M)$ となる．こうして，$\tau(M)$ は

$$\tau(M) = \dim \mathrm{Harm}^{2k}_+(M) - \dim \mathrm{Harm}^{2k}_-(M) \tag{12.55}$$

と表される．

問 12.2 $\dim M = 4k$ とする．このとき

$$\tau(M) = \chi(M) \pmod 2 \tag{12.56}$$

が成り立つことを示せ．［ヒント：Poincaré 双対定理を用いて，$\chi(M) = b^{2k} \pmod 2$ を示せ．］

---

[2] 任意の $[\eta]$ に対して，$\sigma([\omega], [\eta]) = 0$ ならば $[\omega] = [0]$ であるとき，対称双一次形式 σ は非退化であるという．

12.5.2 符号数複体と Hirzebruch 符号数定理

M を境界をもたないコンパクト m 次元多様体とする．そこで作用素

$$\mathfrak{D} \equiv \mathrm{d} + \mathrm{d}^\dagger \tag{12.57}$$

を考える．$\mathfrak{D}$ はラプラシアンの '平方根' である；$\mathfrak{D}^2 = \mathrm{dd}^\dagger + \mathrm{d}^\dagger\mathrm{d} = \Delta$．作用素の積の表象は表象の積になっているから，$\mathfrak{D}$ が楕円型であることを示すには，Δ が楕円型であることを確かめさえすればよい．d に関しては，$\sigma(\mathrm{d}, \xi) = \xi \wedge \omega$ である．一方，$\mathrm{d}^\dagger$ に対しては，(Palais 1965, pp. 77-8) にあるように

$$\sigma(\mathrm{d}^\dagger, \xi) = -i_\xi \tag{12.58}$$

が示される．ここで，$i_\xi : \Omega_p^r(M) \to \Omega_p^{r-1}(M)$ は

$$\begin{aligned} &i_\xi(\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r}) \\ &\equiv \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} g^{\mu_j \mu} \xi_\mu \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\hat{x}^{\mu_j} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} \end{aligned}$$

によって定義される内積である．ˆ の下の 1-形式は除かれ，また $\xi = \xi_\mu \mathrm{d}x^\mu$ とおいた．g は与えられた Riemann 計量である．さて，ラプラシアンの表象は (12.58) から求められ，

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta, \xi)\omega &= \sigma(\mathrm{dd}^\dagger + \mathrm{d}^\dagger\mathrm{d}, \xi)\omega = -[\xi \wedge i_\xi(\omega) + i_\xi(\xi \wedge \omega)] \\ &= -i_\xi(\xi) \wedge \omega = -\|\xi\|^2 \omega \end{aligned}$$

となるが，ここで ω は任意の r-形式で，$\| \quad \|$ は与えられた Riemann 計量に関してのノルムである．結局

$$\sigma(\Delta, \xi) = -\|\xi\|^2 \tag{12.59}$$

が得られる．こうして Δ が楕円型であり，$\mathfrak{D} \equiv \mathrm{d} + \mathrm{d}^\dagger$ も楕円型であることがわかった．

ラプラシアン $\Delta = \mathfrak{D}^2$ は $\Omega^*(M)$ 上で自己双対であるので，Δ の指数は自明に消える．また，$\Omega^*(M)$ 上で $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^\dagger$ なので，$\mathrm{ind}\mathfrak{D} = 0$ もわかる．自明ではない指数定理を構成するには，$\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}^\dagger$ を満たす複体を見いださねばならない．

問 12.3 $\mathfrak{D}$ の偶数次形式への制限 $\mathfrak{D}^{\mathrm{e}} : \Omega^{\mathrm{e}}(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^{\mathrm{o}}(M)^{\mathbb{C}}$ を考える．ここで $\Omega^{\mathrm{e}}(M)^{\mathbb{C}} \equiv \bigoplus \Omega^{2i}(M)^{\mathbb{C}}, \Omega^{\mathrm{o}}(M)^{\mathbb{C}} \equiv \bigoplus \Omega^{2i+1}(M)^{\mathbb{C}}$ である．$\mathfrak{D}^{\mathrm{e}}$ の随伴は $\mathfrak{D}^{\mathrm{o}} \equiv \mathfrak{D}^\dagger : \Omega^{\mathrm{o}}(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^{\mathrm{e}}(M)^{\mathbb{C}}$ である．このとき

$$\mathrm{ind}\mathfrak{D}^{\mathrm{e}} = \dim\ker\mathfrak{D}^{\mathrm{e}} - \dim\ker\mathfrak{D}^{\mathrm{o}} = \chi(M)$$

を示せ．[ヒント：まずは，$\ker\mathfrak{D}^{\mathrm{e}} = \bigoplus \mathrm{Harm}^{2i}(M)$ と $\ker\mathfrak{D}^{\mathrm{o}} = \bigoplus \mathrm{Harm}^{2i+1}(M)$ を示せ．この複体は自明ではないが，新しい指数を定めるものでもない．]

$\dim M = m = 2l$ のとき，$\eta \in \Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$ に関して $**\eta = (-1)^r\eta$ を得る．そこで，作用素 $\pi : \Omega^r(M)^{\mathbb{C}} \to \Omega^{m-r}(M)^{\mathbb{C}}$ を

$$\pi \equiv \mathrm{i}^{r(r-1)+l} * \tag{12.60}$$

によって定める．π は $(-1)^r**=1$ の‘平方根’である．実際，$\omega \in \Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$ に対して

$$\pi^2\omega = \mathrm{i}^{r(r-1)+l}\pi(*\omega) = \mathrm{i}^{r(r-1)+l+(2l-r)(2l-r-1)+l} **\omega$$

$$= \mathrm{i}^{2r^2} **\omega = (-1)^r **\omega = \omega \tag{12.61}$$

となる．ここで $r \equiv r^2 \pmod 2$ を用いた．容易に確かめられる（演習）ように

$$\{\pi, \mathfrak{D}\} = \pi\mathfrak{D} + \mathfrak{D}\pi = 0 \tag{12.62}$$

である．π は $\Omega^*(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus \Omega^r(M)^{\mathbb{C}}$ に作用する．$\pi^2 = 1$ なので，π の固有値は ± 1 である．このとき，π の固有値 ± 1 の固有空間を $\Omega^{\pm}(M)$ として，$\Omega^*(M)^{\mathbb{C}}$ は

$$\Omega^*(M)^{\mathbb{C}} = \Omega^+(M) \oplus \Omega^-(M) \tag{12.63}$$

と分解される．$\mathfrak{D}$ は π と反可換なので，$\mathfrak{D}$ の $\Omega^+(M)$ への制限は**符号数複体**とよばれる楕円型複体を定める．

$$\mathfrak{D}_+ : \Omega^+(M) \to \Omega^-(M) \tag{12.64}$$

ここで，$\mathfrak{D}_+ \equiv \mathfrak{D}|_{\Omega^+(M)}$ である．符号数複体の指数は

$$\mathrm{ind}\mathfrak{D}_+ = \dim\ker\mathfrak{D}_+ - \dim\ker\mathfrak{D}_-$$

$$= \dim \mathrm{Harm}(M)^+ - \dim \mathrm{Harm}(M)^- \tag{12.65}$$

であるが，ここで $\mathfrak{D}_- \equiv \mathfrak{D}^\dagger{}_+ : \Omega^-(M) \to \Omega^+(M)$, $\mathrm{Harm}(M)^{\pm} \equiv \{\omega \in \Omega^{\pm}(M) | \mathfrak{D}_{\pm}\omega = 0\}$ である．(12.65) の右辺において，調和 l-形式以外のすべての寄与はキャンセルする．これを確かめるために，$\ker\mathfrak{D}_+$ と $\ker\mathfrak{D}_-$ を

$$\ker\mathfrak{D}_{\pm} = \mathrm{Harm}^l(M)^{\pm} \oplus \sum_{0\le r\le l} [\mathrm{Harm}^r(M)^{\pm} \oplus \mathrm{Harm}^{m-r}(M)^{\pm}]$$

と分解する．ここで，$\mathrm{Harm}^r(M)^{\pm} \equiv \mathrm{Harm}(M)^{\pm} \cap \Omega^r(M)$ である．$\omega \in \mathrm{Harm}^r(M)$ ならば，$\omega \pm \pi\omega \in \mathrm{Harm}^r(M)^{\pm} \oplus \mathrm{Harm}^{m-r}(M)^{\pm}$ を得る．このとき，対応 $\omega + \pi\omega \to \omega - \pi\omega$ は $\mathrm{Harm}^r(M)^+ \oplus \mathrm{Harm}^{m-r}(M)^+$ と $\mathrm{Harm}^r(M)^- \oplus \mathrm{Harm}^{m-r}(M)^-$ の間の同型写像を定める．すると，指数は

$$\mathrm{ind}\mathfrak{D}_+ = \dim \mathrm{Harm}^{2k}(M)^+ - \dim \mathrm{Harm}^{2k}(M)^- \tag{12.66}$$

と簡略化される．ここで前と同様 $l = 2k$ とおいた（l が奇数ならば指数は消える）．$\mathrm{Harm}^{2k}(M)$ において $\pi = *$ より $\mathrm{Harm}^{2k}(M)^{\pm} = \mathrm{Harm}^{2k}_{\pm}(M)$ となることに注意せよ．(12.54) を参照．したがって，指数 (12.66) は Hirzebruch 指数に帰着する：

$$\mathrm{ind}\mathfrak{D}_+ = \tau(M) \tag{12.67}$$

位相的指数の導出はやや技術的なところもあるので，単に Shanahan(1978) にある結果を引用するにとどめる．$\Lambda^{\pm}T^*M^{\mathbb{C}}$ を $\Omega^{\pm}(M) = \Gamma(M, \Lambda^{\pm}T^*M^{\mathbb{C}})$ となるような $\Lambda^*T^*M^{\mathbb{C}}$

の部分空間とする．このとき

$$
\begin{aligned}
\text{位相的指数} &= (-1)^l \int_M \mathrm{ch}(\wedge^+ T^* M^{\mathbb{C}} - \wedge^- T^* M^{\mathbb{C}}) \left. \frac{\mathrm{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)} \right|_{\mathrm{vol}} \\
&= 2^l \int_M \prod_{i=1}^{l} \left. \frac{x_i/2}{\tanh x_i/2} \right|_{\mathrm{vol}} = \int_M \prod_{i=1}^{l} \left. \frac{x_i}{\tanh x_i} \right|_{\mathrm{vol}}
\end{aligned}
$$

を得る．最後の等式は，展開したときの $2l$-形式についてのみ正しく，また $x_i = x_i(TM^{\mathbb{C}})$ である．こうして，**Hirzebruch の符号数定理**

$$
\tau(M) = \int_M L(TM)|_{\mathrm{vol}} \tag{12.68}
$$

が得られる．ここで L は (11.91) で定義された Hirzebruch の L 多項式である．L は x_i に関する偶関数なので，$m = 2 \pmod 4$ ならば $\tau(M)$ は消える．例えば，$m = 2$ のとき $\tau(M) = 0$ である．$m = 4$ のときには

$$
\tau(M) = \int_M \frac{1}{3} p_1(TM) = -\frac{1}{24\pi^2} \int \mathrm{tr}\mathcal{R}^2 \tag{12.69}
$$

を得る．

Dolbeault 複体の場合と同様に，符号数複体においてもベクトル束とのテンソル束を考えることによりことにより符号数複体を 捻る ことができる．例えば，Eguchi 他 (1980) を参照．

12.6 スピン複体

古典的な複体の最後の例は，スピン複体である．この複体は，ゲージ場と重力場のどちらかと，あるいは両方と相互作用する Dirac 場を記述することから，物理学では極めて重要である．

12.6.1 Dirac 作用素

m 次元向き付け可能な多様体 M 上のスピン束 $S(M)$ を考える．この束の切断全体の集合を $\Delta(M) = \Gamma(M, S(M))$ と表すことにしよう．次元は偶数 $m = 2l$ とする．スピン群 SPIN(m) は，m 個の Dirac 行列 $\{\gamma^\alpha\}$ で生成され，それらは

$$
\gamma^{\alpha\dagger} = \gamma^\alpha \tag{12.70a}
$$

$$
\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\delta^{\alpha\beta} \tag{12.70b}
$$

を満たす．本章を通して，計量は Euclid 符号をもつと仮定する．Clifford 代数は

$$
1; \gamma^\alpha; \gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}(\alpha_1 < \alpha_2); \ldots; \gamma^{\alpha_1} \ldots \gamma^{\alpha_k}(\alpha_1 < \ldots < \alpha_k); \ldots; \gamma^1 \ldots \gamma^{2l}
$$

で生成される．最後の生成元は特に重要であり，

$$
\gamma^{m+1} \equiv \mathrm{i}^l \gamma^1 \ldots \gamma^m \tag{12.71}
$$

と定義する．γ^{m+1} は $(\gamma^{m+1})^2 = \mathbf{1}$, $(\gamma^{m+1})^\dagger = \gamma^{m+1}$ という習慣を満足するように定義されている．Clifford 代数の一般論から，γ^α は複素数を成分とする $2^l \times 2^l$ 行列で表されることが示される．γ^{m+1} が

$$\gamma^{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{12.72}$$

と対角化されるような $\{\gamma^\alpha\}$ の表現行列を選んでおくと便利である．ここで，$\mathbf{1}$ は $2^{l-1} \times 2^{l-1}$ 単位行列である．

例 12.4 $m = 2$ に対して，

$$\gamma^0 = \sigma_2 \quad \gamma^1 = \sigma_1 \quad \gamma^3 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$$

ととることができる．σ_α は Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である．$m = 4$ に対しては

$$\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\alpha^\beta \\ -\mathrm{i}\bar{\alpha}^\beta & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha^\beta = (\mathbf{1}, -\mathrm{i}\sigma), \quad \bar{\alpha}^\beta = (\mathbf{1}, \mathrm{i}\sigma)$$

$$\gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

とすればよい．

Dirac スピノル $\psi \in \Delta(M)$ は，Clifford 代数の一つの既約表現であるが SPIN$(2l)$ の規約表現<u>ではない</u>．SPIN$(2l)$ の既約表現は，$\Delta(M)$ を γ^{m+1} の固有値にしたがって分解することによって得られる．$(\gamma^{m+1})^2 = \mathbf{1}$ なので，**カイラリティ**とよばれる γ の固有値は ± 1 でなければならない．このとき，$\Delta(M)$ は2つの固有空間

$$\Delta(M) = \Delta^+(M) \oplus \Delta^-(M) \tag{12.73}$$

に分解される．ここで，$\psi^\pm \in \Delta^\pm(M)$ に対して $\gamma^{m+1}\psi^\pm = \pm\psi^\pm$ である．$\Delta^\pm$ の上への射影作用素 $\mathcal{P}^\pm$ は

$$\mathcal{P}^+ \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.74a}$$

$$\mathcal{P}^- \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^{m+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{12.74b}$$

で与えられる．したがって

$$\psi^+ = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta^+(M), \qquad \psi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix} \in \Delta^-(M) \tag{12.75}$$

と書くことができる．[若干の記号の乱用に注意．] 読者は，$\mathcal{P}^+ + \mathcal{P}^- = 1, (\mathcal{P}^\pm)^2 = \mathcal{P}^\pm, \mathcal{P}^+\mathcal{P}^- = 0, \mathcal{P}^\pm\psi^\pm = \psi^\pm, \mathcal{P}^\pm\psi^\mp = 0$ が成り立つことを実際に確かめられたい．

曲がった空間の **Dirac** 作用素は

$$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,\psi \equiv \mathrm{i}\gamma^\mu \nabla_{\partial/\partial x^\mu}\psi = \mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \omega_\mu)\psi \tag{12.76}$$

で与えられる（§ 7.10）が，ここで $\omega_\mu = \frac{1}{2}\mathrm{i}\omega_\mu{}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta}$ はスピン接続であり，$\gamma^\mu \equiv \gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu$ である．$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/$ が楕円型であることを証明しよう．f を $p \in M$ の近傍で定義された関数で，$f(p) = 0$, $\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu f(p) = \mathrm{i}\gamma^\mu\xi_\mu \equiv \mathrm{i}\,\xi\!\!\!/$ を満たすものとする（ベクトル $A = A^\mu e_\mu$ に対して $A\!\!\!/$ で $\gamma^\mu A_\mu$ を表す）．切断 $\tilde{\psi} \in \Delta(M)$ を $\tilde{\psi}(p) = \psi$ を満たすようにとる．(12.4) から

$$\sigma(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,, \xi)\psi = \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,(f\tilde{\psi})|_p = (\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,f)\tilde{\psi}|_p = \mathrm{i}\,\xi\!\!\!/\,\psi$$

を得るが，これは

$$\sigma(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,, \xi\!\!\!/\,) = \mathrm{i}\,\xi\!\!\!/ \tag{12.77}$$

を示している．$\xi\!\!\!/\;\xi\!\!\!/ = \xi_\alpha\xi_\beta\gamma^\alpha\gamma^\beta = \xi^\mu\xi_\mu$ に注意すれば，(12.77) は $\mathrm{i}\,\xi\!\!\!/ \neq 0$ のとき逆をもち，ゆえに $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/$ が楕円型作用素であることがわかる．

容易に示されるように，$\{\gamma^\alpha\}$ は

$$\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\alpha_\beta \\ -\mathrm{i}\bar{\alpha}_\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha^\dagger{}_\beta = \bar{\alpha}_\beta \tag{12.78}$$

ととることができる．$m = 2, 4$ に対しては，例 12.4 を参照．このとき，(12.76) は

$$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/ = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix} \tag{12.79}$$

となる．ここで，

$$D \equiv \bar{\alpha}^\beta e_\beta{}^\mu(\partial_\mu + \omega_\mu), \qquad D^\dagger \equiv -\alpha^\beta e_\beta{}^\mu(\partial_\mu + \omega_\mu) \tag{12.80}$$

である．ゆえに，$D^\dagger$ は実際 D の随伴である（$\partial_\mu + \omega_\mu$ は反 Hermite であることに注意せよ）．

$$\begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} \in \Delta^+(M)$$

に対して

$$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/ \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D^\dagger \\ D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ D\psi^+ \end{pmatrix}$$

を得るが，一方で

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix} \in \Delta^-(M)$$

に対しては

$$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/ \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^\dagger\psi^- \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る．ゆえに，$D = \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,\mathcal{P}^+ : \Delta^+(M) \to \Delta^-(M)$, $D^\dagger = \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,\mathcal{P}^- : \Delta^-(M) \to \Delta^+(M)$ である．こうして，2 項複体

$$\Delta^+(M) \underset{D^\dagger}{\overset{D}{\rightleftarrows}} \Delta^-(M) \tag{12.81}$$

が得られるが，これをスピン複体とよぶ．この複体の解析的指数は

$$\mathrm{ind}D = \dim\ker D - \dim\ker D^\dagger = \nu_+ - \nu_- \tag{12.82}$$

である．ここで ν_+ (ν_-) はカイラリティ＋(−) のゼロ・モードの個数である．

この場合に，AS 指数定理を適用しよう．Clifford 代数とスピン複体の詳細には立ち入らずに，簡単に結果のみを書き下す．スピン複体 (12.81) に対する AS 指数定理は

$$\begin{aligned}\nu_+ - \nu_- &= \int_M \mathrm{ch}(\Delta^+(M) - \Delta^-(M)) \left.\frac{\mathrm{Td}(TM^{\mathbb{C}})}{e(TM)}\right|_{\mathrm{vol}} \\ &= \int_M \hat{A}(TM)|_{\mathrm{vol}} \end{aligned}\tag{12.83}$$

となる．ここで $\hat{A}$ は (11.94) で定義される **Dirac 種数**である．$\hat{A}$ は $4j$-形式のみで書かれるので，$m = 0 \pmod 4$ でなければ $\nu_+ - \nu_-$ は消える．もちろん，これは必ずしも $\nu_+ = \nu_- = 0$ を意味するわけではない．

12.6.2 捻れスピン複体

物理学では，スピノル場はある群 G の表現に属する．例えば，QCD におけるクォーク場は SU(3) の **3** に属する．G の表現に属するスピノル場は，テンソル束 $S(M) \otimes E$ の切断であり，E は適当な表現における $P(M, G)$ の同伴束である．この場合の Dirac 作用素 $D_E : \Delta^+(M) \otimes E \to \Delta^-(M) \otimes E$ は

$$D_E = \mathrm{i}\gamma^\alpha e_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \omega_\mu + \mathcal{A}_\mu)\mathcal{D}_+ \tag{12.84}$$

である．ここで，$\mathcal{A}_\mu$ は E 上のゲージ・ポテンシャルである．この**捻れスピン複体**に対する AS 指数定理は

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \hat{A}(TM)\mathrm{ch}(E)|_{\mathrm{vol}} \tag{12.85}$$

である．

$n = 2$ に対して

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \mathrm{ch}_1(E) = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_M \mathrm{tr}\mathcal{F} \tag{12.86a}$$

を得る．一方 $n = 4$ に対して

$$\begin{aligned}\nu_+ - \nu_- &= \int_M [\mathrm{ch}_2(E) + \hat{A}_1(TM)\mathrm{ch}_0(E)] \\ &= \frac{-1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 + \frac{\dim E}{192\pi^2}\int_M \mathrm{tr}\mathcal{R}^2 \end{aligned}\tag{12.86b}$$

となる．

例 12.5

$$M = T^{2l} = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{2l\text{ 回直積}}$$

に対して

$$\hat{A}(TM) = \hat{A}\left(\bigoplus_{1}^{2l} TS^1\right) = \prod_{1}^{2l} \hat{A}(TS^1) = 1$$

を得る．また，$\hat{A}(TS^{2l}) = 1$ を得る．これらの多様体に関しては

$$\nu_+ - \nu_- = \int_M \mathrm{ch}(E)|_{\mathrm{vol}} \tag{12.87}$$

を得る．

例 12.6 モノポール束 $P(S^2, \mathrm{U}(1))$ を考えよう．$\mathcal{A}$ が局所ゲージ・ポテンシャルとすると，場の強さは $\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A}$ である．指数定理は

$$\nu_+ - \nu_- = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{S^2} \mathcal{F} = -\frac{1}{2\pi}\int_{S^2} F \tag{12.88}$$

である．ここで $\mathcal{F} = \mathrm{i}F$．§ 10.5 で示したように，右辺は回転数 $\pi_1(\mathrm{U}(1)) \cong \mathbb{Z}$ を表し，解析的情報（左辺）が位相的方法（右辺）で表されている．

$P(S^4, \mathrm{SU}(2))$ をインスタントン束とする．(12.87) 式から

$$\nu_+ - \nu_- = \int_{S^4} \mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) = \frac{-1}{8\pi^2}\int_{S^4} \mathrm{tr}\mathcal{F}^2 \tag{12.89}$$

が読みとられる．右辺はインスタントン数 $k \in \pi_3(\mathrm{SU}(2)) \cong \mathbb{Z}$ を表す．$\mathcal{F} = *\mathcal{F}$ ならば $k > 0$，$\mathcal{F} = -*\mathcal{F}$ ならば $k < 0$ であることに注意せよ．$k > 0$ $(k < 0)$ ならば $\nu_- = 0$ $(\nu_+ = 0)$ であることが示される，Jackiw and Rebbi(1977) を参照．例えば，$\mathcal{F}$ を自己双対とする．$\psi^\pm \in \ker D^\dagger = \ker DD^\dagger$ と仮定する．(12.80) から

$$DD^\dagger\psi^- = [(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu)^2 + 2\mathrm{i}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}]\psi^- = 0$$

が求められる．ここで，$\bar{\sigma}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4\mathrm{i}}(\alpha^\mu\bar{\alpha}^\nu - \alpha^\nu\bar{\alpha}^\mu)$ である．容易に確かめられるように，$\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ は反自己双対 $(\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -*\bar{\sigma}^{\mu\nu})$ であり，ゆえに $\bar{\sigma}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$ である．$(\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu)^2$ は正定値作用素なので，規格化された束縛状態をもたない．したがって $\ker D^\dagger = \emptyset$ である．

12.7 熱核と一般化された ζ 関数

§ 12.2 で述べたように，AS 指数定理を証明するにはいくつかの方法がある．熱核の方法は比較的物理学者には取っつきやすく，しかも物理学における他の問題への応用も多くある．一般化された ζ 関数は熱核と関係し，また物理学とも関係する．

12.7.1 熱核と指数定理

E を m 次元コンパクト多様体 M 上の複素ベクトル束とする．$\Delta : \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$ を楕円型作用素とし，その固有ベクトルを $|n\rangle$ とする：

$$\Delta|n\rangle = \lambda_n|n\rangle \tag{12.90}$$

Δ の固有値全体の集合を $\mathrm{Spec}(\Delta)$ で表すことにする．また，Δ は非負であると仮定する：すなわちすべての固有値が非負とする．さらに，ゼロ固有値をもつ n_0 個のモード $|0,i\rangle$, $1 \leq i \leq n_0$ が存在するとする．言いかえれば，

$$\dim\ker\Delta = n_0 \tag{12.91}$$

ということである．これらのモードはゼロ・モードとよばれる．**熱核** $h(t)$ を

$$h(t) \equiv \mathrm{e}^{-t\Delta} \tag{12.92}$$

によって定義する．$h(t)$ を座標基底を使って

$$\begin{aligned} h(x,y;t) \equiv \langle x|h(t)|y\rangle &= \left\langle x \left| \sum_n \mathrm{e}^{-t\Delta} \right| n \right\rangle \langle n|y\rangle \\ &= \sum_n \mathrm{e}^{-t\lambda_n} \langle x|n\rangle\langle n|y\rangle \end{aligned} \tag{12.93}$$

と表すと便利である．縮退している固有状態は，縮退度の分だけ数える．$\langle x|n\rangle$ は正規直交系であると仮定する：$\int \langle n|x\rangle\langle x|m\rangle = \delta_{mn}$.　$t>0$ に対する (12.92) の収束性は Δ が非負なので保証されている．極限を $t\to\infty$ と取ると

$$\lim_{t\to\infty} h(x,y;t) = \sum_{i=1}^{n_0} \langle x|0,i\rangle\langle 0,i|y\rangle \tag{12.94}$$

を得る．ここで和はゼロ・モード $|0,i\rangle$ のみについてとるものとする．したがって，$h=\mathrm{e}^{-t\Delta}$ は $t\to\infty$ のときゼロ・モードの空間への射影作用素に収束する．

$$\mathrm{e}^{-t\Delta} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} \sum |0,i\rangle\langle 0,i| \tag{12.95}$$

そこで

$$\tilde{h}(t) \equiv \int h(x,x;t)\mathrm{d}x = \sum_n \mathrm{e}^{-t\lambda_n} \tag{12.96}$$

と定義すると，(12.94) から

$$n_0 = \lim_{t\to\infty} \tilde{h}(t) \tag{12.97}$$

となる．

h が**熱方程式**

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) h(x,y;t) = 0 \tag{12.98}$$

を満たすことことが容易に確かめられる．Δ が通常のラプラシアンならば，(12.98) は普通の熱方程式となる．初期条件は

$$h(x,y;0) = \sum_n \langle x|n\rangle\langle n|y\rangle = \delta(x-y) \tag{12.99}$$

で，最後の等式は固有ベクトルの完全性から得られる．

問 12.4 $u(x,t)$ を (12.98) の解で $u(x,0)=u(x)$ を満たすものとする．このとき

$$u(x,t)=\int h(x,y;t)u(y)\mathrm{d}y \tag{12.100}$$

を示せ．[最初に (12.100) が初期条件を満たすことを確かめ，つぎにそれが熱方程式の解となることを確かめよ．]

(12.98) の解は $t\to\varepsilon$ のとき

$$h(x,x;\varepsilon)=\sum_i a_i(x)\varepsilon^i \tag{12.101}$$

で与えられる漸近展開をもつことが知られている．Gikey(1984) を参照．同様に，$\tilde{h}(t)$ は展開

$$\tilde{h}(\varepsilon)\equiv\sum_i a_i\varepsilon^i \tag{12.102}$$

をもつ．ここで $a_i\equiv\int a_i(x)\mathrm{d}x$.

E と F を M 上のベクトル束とし，$D:\Gamma(M,E)\to\Gamma(M,F)$ を楕円型作用素とする．そこで，2 つのラプラシアンをつぎのように定義する．

$$\Delta_E\equiv D^\dagger D:\Gamma(M,E)\to\Gamma(M,E) \tag{12.103a}$$

$$\Delta_F\equiv DD^\dagger:\Gamma(M,F)\to\Gamma(M,F) \tag{12.103b}$$

これらの作用素のゼロ以外の固有値は，縮退度を含めて等しいことに注意しよう．これを見るために，$\Delta_E|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle$, $\lambda\neq 0$ とする．このとき，ベクトル $D|\lambda\rangle\in\Gamma(M,F)$ に対し

$$\Delta_F(D|\lambda\rangle)=DD^\dagger D|\lambda\rangle=D\Delta_E|\lambda\rangle=\lambda(D|\lambda\rangle)$$

が成り立つ．$\ker\Delta_E=\ker D$ なので，$D|\lambda\rangle\neq 0$ に注意する．逆に，もし $|\mu)\in\Gamma(M,F)$ が $\Delta_F|\mu)=\mu|\mu)$ を満たすならば，$D^\dagger|\mu)\in\Gamma(M,E)$ は同じ固有値 μ をもつ Δ_E の固有ベクトルである．したがって，対称性（これは超対称性の一種である）

$$\mathrm{Spec}'\Delta_E=\mathrm{Spec}'\Delta_F \tag{12.104}$$

を確かめたことになる．ここで肩に付いたプライムはゼロ・モードを省略することを表している．

二つの熱核 h_E と h_F を

$$h_E(x,y,t)=\sum \mathrm{e}^{-\lambda_n}\langle x|n\rangle\langle n|y\rangle \tag{12.105a}$$

$$h_F(x,y,t)=\sum \mathrm{e}^{-\mu_m}\langle x|m)(m|y\rangle \tag{12.105b}$$

によって定義する．このとき

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{h}_E(t)=\dim\ker\Delta_E=\dim\ker D \tag{12.106a}$$

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{h}_F(t)=\dim\ker\Delta_F=\dim\ker D^\dagger \tag{12.106b}$$

を得る．さらに興味深いのは D の指数である．$\ker D = \ker \Delta_E$ かつ $\ker D^\dagger = \ker \Delta_F$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}D &= \dim\ker D - \dim\ker D^\dagger = \dim\ker\Delta_E - \dim\ker\Delta_F \\ &= \lim_{t\to\infty}[\tilde{h}_E(t) - \tilde{h}_F(t)] = \tilde{h}_E(t) - \tilde{h}_F(t)\end{aligned} \tag{12.107}$$

を得る．最後の等式は $\tilde{h}_E(t) - \tilde{h}_F(t)$ の t に依存しない部分は対称性 (12.104) によりキャンセルすることから成り立つ．$\tilde{h}_E(t)$ と $\tilde{h}_F(t)$ を

$$\tilde{h}_E(t) = \sum a_i^E t^i \quad \tilde{h}_F(t) = \sum a_i^F t^i$$

と展開する．t に依存しない項を集めてくると

$$\mathrm{ind}D = a_0^E - a_0^F = \int \mathrm{d}x[a_0^E(x) - a_0^F(x)]\mathrm{d}x \tag{12.108}$$

を得る．ここで $a_0^{E,F}(x)$ は (12.101) で定義されたものである．

一般に，$a_0^{E,F}(x)$ は曲率 2-形式で書かれた局所不変量である．§13.2 において，$\hat{A}(TM) = 1$ を満たす多様体上の捻れスピン複体に対する指数定理

$$\mathrm{ind}D = \nu_+ - \nu_- = \int_M \mathrm{ch}(\mathcal{F})|_{\mathrm{vol}}$$

を，熱核を用いて証明する．

問 12.5 $D, D^\dagger, \Delta_E, \Delta_F$ を上と同じものとする．このとき

$$I(s) \equiv \mathrm{tr}\left[\frac{s}{\Delta_E + s} - \frac{s}{\Delta_F + s}\right] \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \tag{12.109}$$

は s によらないことを示せ．また，$I(s) = \mathrm{ind}\, D$ を示せ．

12.7.2 一般化された ζ 関数

E と F を M 上のベクトル束とする．新しい関数

$$\zeta_E(x, y; s) \equiv \sum{}' \langle x|n\rangle\langle n|y\rangle\lambda_n^{-s} \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \tag{12.110}$$

を定義する．ここで $\Delta_E|n\rangle = \lambda_n|n\rangle$ であり，和のプライムはゼロ・モード（$\lambda_n = 0$）が省かれていることを表す．[関数 $\zeta_F(x, y; s)$ も Δ_F に対して同様に定義される．] 関数 h_E と ζ_E は **Mellin 変換**で関係づけられる．これを見るために，Γ 関数の定義を思い出そう．

$$\Gamma(s) \equiv \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \lambda^s \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

ここで，λ は厳密に正の値を取る．これより

$$\Gamma(s)\zeta(x, y; s) = \sum_n{}' \int_0^\infty t^{s-1}\mathrm{e}^{-\lambda_n t}\langle x|n\rangle\langle n|y\rangle\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^\infty t^{s-1}[h(x,y;t) - \sum_i \langle x|0,i\rangle\langle 0,i|y\rangle]\mathrm{d}t \tag{12.111}$$

が得られる．

また，

$$\zeta_\Delta(s) \equiv \int_M \zeta(x,x;s)\mathrm{d}x = \sum_n{}' \lambda_n^{-s} \tag{12.112}$$

は，(1.42) で定義された一般化された ζ 関数であることにも注意する．

問 12.6

$$\Delta^{-s} f(x) = \int \zeta(x,y;s) f(y)\mathrm{d}y \tag{12.113}$$

示せ．ただし，作用素の一般ベキは固有値の意味で，すなわち $\Delta^{-s}|n\rangle = \lambda_n^{-s}|n\rangle$ として定義されているものとする．Re s は (12.113) が矛盾なく定義されるよう十分大きいと仮定する．[ヒント：固有ベクトルの完全性を使え．]

例 12.7 つぎの例は，Kulkarni(1975) からの引用である．$M = S^1 = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\}$ とし，$E = F$ を S^1 上の自明束（円柱）とする．作用素 $\Delta \equiv -\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ を考える．固有値の方程式

$$-\frac{\partial^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\partial\theta^2} = n^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \quad n \in \mathbb{Z}$$

より

$$\lambda_n = n^2 \quad \langle\theta|n\rangle = (2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

が得られる．このとき，熱核は

$$\begin{aligned} h(\theta_1,\theta_2;t) &= \sum \mathrm{e}^{-n^2 t}\langle\theta_1|n\rangle\langle n|\theta_2\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum{}' \mathrm{e}^{-n^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta_1-\theta_2)}\right) \end{aligned} \tag{12.114}$$

で，一般化された ζ 関数は

$$\begin{aligned} \zeta(\theta_1,\theta_2;s) &= \sum{}' n^{-2s}\langle\theta_1|n\rangle\langle n|\theta_2\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum{}' n^{-2s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned} \tag{12.115}$$

となる．また，容易に $h(\theta,\theta;t) = 1 + \sum' \mathrm{e}^{-n^2 t}$ が

$$1 + 2\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x^2 t}\mathrm{d}x < h(\theta,\theta;t) < 1 + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2 t}\mathrm{d}x$$

を満たすことから確かめられる．これから，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2 t}\mathrm{d}x - 1 < h(\theta,\theta;t) < \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2 t}\mathrm{d}x + 1$$

あるいは積分値

$$\int \mathrm{e}^{-x^2 t}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}t^{-1/2}$$

を代入して

$$\sqrt{\pi}t^{-1/2} - 1 < h(\theta,\theta;t) < \sqrt{\pi}t^{-1/2} + 1$$

が得られる．これは

$$\lim_{t\to 0^+} h(\theta,\theta;t) \sim \sqrt{\pi}t^{-1/2} \tag{12.116}$$

であることを示している．一般に，漸近級数は $t^{-\dim M/2}$ の項から始まる．

12.8 Atiyah-Patodi-Singer 指数定理

ここまでは，境界をもたないコンパクト多様体上の指数定理に関心を払ってきた．物理学における実際の設定では，しばしば境界をもつ底空間 M 上で定義された作用素の指数を求める必要が生じる．ここでは，AS 指数定理のこうした場合への拡張について論じることにする．我々の議論は M 上のスピン束に限定して行う．その理由は，これが唯一13章で必要になる設定であるからである．

12.8.1 η-不変量とスペクトル流

$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/$ を奇数次元多様体 M 上の Hermite Dirac 作用素とする．$\dim M = 2l+1$ とおく．$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/$ が Hermite なので，固有値 λ_k は実数である．そこで，$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/$ の **η-不変量**を $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/$ のスペクトル反対称性

$$\eta \equiv \sum_{\lambda_k>0} 1 - \sum_{\lambda_k<0} 1 \tag{12.117}$$

によって定義する．この定義は不十分なので，適切な正規化が必要となる．例えば，

$$\eta(s) \equiv {\sum_k}' \mathrm{sgn}(\lambda_k)|\lambda_k|^{-2s} \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \tag{12.118}$$

としたときに，η を $\lim_{s\to 0}\eta(s)$ によって定義することができる．適当な境界条件の下で，$\eta(s)$ は $s=0$ において極をもたないことが示される．

問 12.7 Mellin 変換

$$\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) a^{-(s+1)/2} = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^s \mathrm{e}^{-ax^2} \qquad a>0$$

を用いて

$$\eta(s) = \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2}(s+1))}\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^s \mathrm{tr}\,\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\, \mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/)^2} \tag{12.119}$$

が成り立つことを示せ．

Dirac 場が外部ゲージポテンシャル $\mathcal{A}_t, t\in[0,1]$ と相互作用すると仮定する．Dirac 作用素 $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,(\mathcal{A}_t)$ は t による固有値問題をもつ．$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,(\mathcal{A}_t)$ の固有値がゼロを横切れば，η-不変量は ± 2 だけジャンプする．このジャンプは，$\lambda \gtrless 0$ モードから $\lambda \lessgtr 0$ モードへの**スペクトル流**を表す；もし η が $+2$ (-2) ジャンプすれば，$\lambda<0$ から $\lambda>0$ $(\lambda>0$ から $\lambda<0)$ への状態の流れがある．図 12.1 を参照．スペクトル流に伴う不連続な変化に加えて，η はまた連続的に変化する成分 η_c をもつ．したがって

$$\eta(t=1) - \eta(t=0) = \int_0^1 \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}\eta_c}{\mathrm{d}t} + 2\times(\text{スペクトル流}) \tag{12.120}$$

を得る．

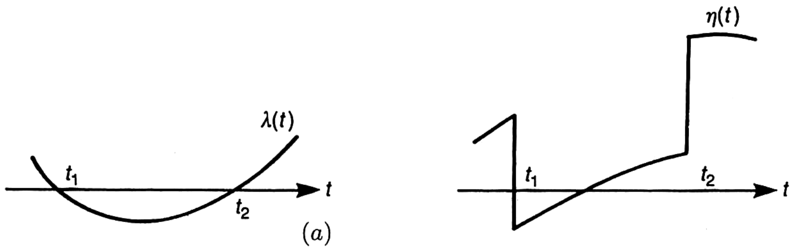


図 12.1. 固有値 λ が (a) のように，ゼロを横切るときはいつでも η-不変量は ± 2 ジャンプする．符号は λ のゼロの横切り方に依存する．

12.8.2 Atiyah-Patodi-Singer の指数定理

$(2l+2)$ 次元の Dirac 作用素 を考えよう．

$$\mathrm{i}\hat{D}_{2l+2} = \mathrm{i}\sigma_1 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2 \otimes \mathrm{i} \nabla\!\!\!/ \,(\mathcal{A}_t) = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{12.121a}$$

ここで

$$D = \mathrm{i}\partial_t - \nabla\!\!\!/ \,(\mathcal{A}_t) \quad D^\dagger = \mathrm{i}\partial_t + \nabla\!\!\!/ \,(\mathcal{A}_t) \tag{12.121b}$$

である．[注：我々の γ 行列の選び方に対して

$$\gamma^{2l+3} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

なので，D と $D^\dagger$ の位置が反対である．(12.79) と見比べよ．]

定理 12.3 (Atiyah-Patodi-Singer) M を奇数次元の多様体とし，$\mathrm{i} \nabla\!\!\!/ \,(\mathcal{A}_t)$ を外部ゲージ場 $\mathcal{A}_t$ と相互作用する M 上の Dirac 作用素とする．このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}D &= \dim\ker D - \dim\ker D^\dagger \\ &= \int_{M\times I} \hat{A}(\mathcal{R})\mathrm{ch}(\mathcal{F})|_{\mathrm{vol}} - \frac{1}{2}[\eta(\mathrm{i} \nabla\!\!\!/ \,(\mathcal{A}_1)) - \eta(\mathrm{i} \nabla\!\!\!/ \,(\mathcal{A}_0))] \end{aligned} \tag{12.122}$$

が成り立つ．

一般的議論から η-不変量の連続部分 η_c は

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}\eta_c}{\mathrm{d}t} = 2\int_{M\times I} \hat{A}(\mathcal{R})\mathrm{ch}(\mathcal{F})|_{\mathrm{vol}} \tag{12.123}$$

を満たすことが示される．このとき，(12.122) の右辺は単にスペクトル流

$$-\frac{1}{2}[\eta(t=1) - \eta(t=0)] + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}\eta_c}{\mathrm{d}t} = -(\text{スペクトル流})$$

である．したがって，APS 指数定理の別の表現

$$\mathrm{indi}\hat{D}_{2l+2} = -(\text{スペクトル流}) \tag{12.124}$$

が得られる．APS 指数定理の最も一般な形の証明は，原論文 Atiyah 他 (1975a, b, 1976) に見ることができる．物理学者たちの証明としては，Alvarez-Gaumé 他 (1985) がある．APS 指数定理を § 13.6 において奇数次元パリティ・アノマリーの考察のために用いる．

例 12.19　スペクトル流がなぜ指数定理に登場するのかを見るために，Atiyah(1985) による例を考えよう．$M = S^1$ とし，θ をその座標とする．そこで，Hermite 作用素

$$\mathrm{i}\nabla_t \equiv \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \mathrm{i}t\right) = \mathrm{i}\partial_\theta + t \quad t \in \mathbb{R} \tag{12.125}$$

を考える．$-\mathrm{i}t$ という項は U(1) ゲージポテンシャルと考えられる．$\mathrm{i}\nabla_i$ の固有ベクトルと固有値は

$$\psi_{n,t}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\ (n \in \mathbb{Z}),\ \lambda_n(t) = n + t$$

で与えられる．$\mathrm{Spec}\,\mathrm{i}\nabla_t = \mathrm{Spec}\,\mathrm{i}\nabla_{t+1}$ なので，作用素 $\mathrm{i}\nabla_t$ の族は t について周期 1 をもつ；図 12.2 を参照．この周期性は，$\mathrm{i}\nabla_t$ と $\mathrm{i}\nabla_{t+1}$ がゲージ等価であるという事実に現れる：

$$\mathrm{i}\nabla_{t+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\nabla_t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

ε を十分小さい正数として，t が $-\varepsilon$ から $1-\varepsilon$ へ変化する間に，$t = 0$ において $\lambda < 0$ から $\lambda > 0$ へちょうど 1 のスペクトル流が存在する．$\mathrm{i}\nabla_t$ から，2 次元 Dirac 作用素

$$\mathrm{i}\not{D}_2 \equiv \mathrm{i}\sigma_1 \otimes \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2 \otimes \mathrm{i}\nabla_t = \begin{pmatrix} 0 & D \\ D^\dagger & 0 \end{pmatrix} \tag{12.126a}$$

が構成される．ここで

$$D \equiv \mathrm{i}\partial_t + \partial_\theta - \mathrm{i}t \quad D^\dagger \equiv \mathrm{i}\partial_t - \partial_\theta + \mathrm{i}t \tag{12.126b}$$

である．これらの作用素は，境界条件

$$\phi(\theta + 2\pi, t) = \phi(\theta, t) \quad \phi(\theta, t+1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\phi(\theta, t) \tag{12.127}$$

を満たす関数上に作用する．

$\phi_0 \in \ker D^\dagger$ とする．このとき，フーリエ展開

$$\phi_0(\theta, t) = \sum a_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$$

を得る．$D^\dagger\phi_0 = 0$ から

$$a_n'(t) + (n+t)a_n(t) = 0$$

を得るが，これは容易に解けて

$$a_n(t) = c_n \exp\left(-\frac{(n+t)^2}{2}\right)$$

となる．境界条件 (12.127) から

$$\sum_n c_n \exp\left(-\frac{(n+t+1)^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} = \sum_n c_n \exp\left(-\frac{(n+t)^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)\theta}$$

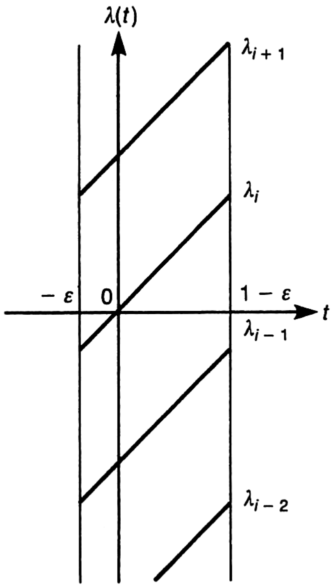


図 **12.2.** $\mathrm{i}\nabla_t$ の固有値の時間発展．Spec $\mathrm{i}\nabla_t$ は周期 1 をもつ．i 番目の固有値は $t=0$ においてゼロを横切るので，1 のスペクトル流が存在する．

が成り立つ必要があるが，このことから c_n は n に依存しないことがわかる．したがって，$\ker D^\dagger$ は 1 次元であり，テータ関数

$$\phi_0(\theta,t)=\sum\exp\left(-\frac{(n+t)^2}{2}-\mathrm{i}n\theta\right) \tag{12.128}$$

により張られる．$\tilde{\phi}_0(\theta,t)\in\ker D$ と仮定する．$\tilde{\phi}_0(\theta,t)=\sum b_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$ とおけば，$b_n(t)$ は

$$b_n'(t)-(n+t)b_n(t)=0$$

を満たす．この方程式の解は

$$b_n(t)=b_n(0)\exp\frac{(n+t)^2}{2}$$

であるので，$\tilde{\phi}_0$ は規格化できない．したがって

$$\mathrm{ind}D=\dim\ker D-\dim\ker D^\dagger=-1$$

が示された．この右辺は $-$(スペクトル流) と一致する．

演習問題 12

1. 本論では，コンパクト多様体のみを扱った．AS 指数定理の非コンパクト多様体への拡張は，**Callias-Bott-Seely 指数定理**である（Callias 1977, Bott and Seely 1977).

ここでは，Hirayama (1983) によって考察された最も簡単な場合を考える．まず，作用素の対

$$L \equiv \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}W(x), \quad L^\dagger \equiv \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}W(x),$$

を考える．ここで，$W(+\infty) = \mu, W(-\infty) = \lambda$ である．

(*a*) $\mathrm{Spec}' L^\dagger L = \mathrm{Spec}' LL^\dagger$ を示せ．ここで肩付きプライムはゼロ固有値を省くことをしめす．

(*b*) つぎを示せ．

$$J(z) \equiv \mathrm{tr}\left(\frac{z}{L^\dagger L + z} - \frac{z}{LL^\dagger + z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{(\mu^2+z)^{1/2}} - \frac{\lambda}{(\lambda^2+z)^{1/2}}\right)$$

第12章への補足

Atiyah-Singer の指数定理は，現在の認識では幾何学と理論物理学の接点に位置する基本定理である．そこで Atiyah-Singer 指数定理が第10章で論じた接続の理論と関連して，効果的に利用される例について触れよう．

理論物理学と幾何学の研究における「接続の理論」の変遷や歴史は，互いに異なるかもしれないが，その重要性は双方に共通している．接続の有効な研究の方法のひとつに，個々の接続を問題とするのでなく，接続全体の空間（モジュライ空間とよばれる）の構造を解析するものがある．そしてモジュライ空間の構造を利用して，多様体の「微分同相不変量」が定義されることがある．ゲージ理論に基づくこうした観点からの多様体の研究は，今のところ4次元で著しい成功を収めている．1980年代前半に始まる **Donaldson 理論**と1990年代半ばに発見された **Seiberg-Witten 理論**である．

ファイバー束が与えられると Riemann 計量を定めて，接続と曲率が定義されるがその際に考察される顕著な性質は，ファイバー束の大域的な捻れ具合が個々の接続の取り方にはよらず，接続と曲率の集合から決まるあるコホモロジー類（特性類）を定めることである．前章で論じたように，このプロセスは Chern-Weil 理論とよばれている．このように接続は，個々を問題とするのではなくそれらを寄せ集めてくると，ファイバー束や多様体の大域的構造を浮かび上がらせるという興味深い特徴をもっている．例えば，取り分け良い性質をもつ接続の族を考えるとそれが多様体の位相構造や微分構造の繊細な情報と結びつくのである．ここでは，Seiberg-Witten 理論の概要を簡単に紹介して，それを読者に実感していただくことにしよう．ただし，補足の紙数は限られているのでやや荒っぽい速成講義となることをご勘弁願いたい．

M を滑らかで向きづけられた，単連結4次元閉多様体とする．技術的理由から，

$$b_2^+(M) > 1 \quad \text{かつ奇数である}$$

と仮定する（後述の議論をよく吟味せよ）．記号 $b_2^+(M)$ の定義を与えなくてはならない．

さて，一般の4次元多様体 M に交点形式 Q_M を，$V = H^2(M;\mathbb{Z})/\mathrm{torsion}$ とおくとき

$$Q_M : V \times V \to \mathbb{Z}, \ \ Q_M(\alpha, \beta) = \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle$$

と定める[3]．$\cup$ はカップ積を表す．Q_M は非退化対称双一次形式であることに注意する．V は自由加群であるからその階数を $r\ (= b_2(M))$ とするとき，V の生成元を $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ とし，交点形式から決まる行列 $A_M = \{Q_M(\alpha_i, \alpha_j)\}_{1 \le i,j \le r}$ を考える．**交点行列** A_M は対称行列であるから，その固有値はすべて実数である．そこで，(V の基底の取り方によらない) 正の固有値の個数を b^+，負の固有値の個数を b^- で表すことにする．このとき，$\tau(M) = b^+ - b^-$ を 4 次元多様体 M の**符号数**（例 11.8 を参照）といい，位相不変量であることが知られている．ちなみに，2 次元ベッチ数は，$b_2(M) = b^+ + b^-$ である[4]．最後に，$b_2^+(M) = b^+$ とおいて求める定義にたどり着いた．

$w_2(M) \in H^2(M; \mathbb{Z}_2)$ を M の第 2 Stiefel-Whitney 類（§ 11.6.3 を参照）とする．特性元全体の集合を

$$\mathcal{C}_M = \{K \in H^2(M; \mathbb{Z}); K \equiv w_2(M) \pmod 2\}$$

とおく．この場合，$K \in \mathcal{C}_M$ は任意の $\alpha \in H^2(M; \mathbb{Z})$ に対して

$$K \cup \alpha \equiv \alpha \cup \alpha \pmod 2$$

を満たすもの，と定義してもよい．

ところで，M 上のある主 $U(1)$ 束を考え，M 上の一般的 (generic) な Riemann 計量 g を一つ定めて接続 A が与えられる．そこで Seiberg-Witten 方程式とよばれるスピノル場 ψ と接続 A に関するモノポール方程式

$$F_A^+ = q(\psi) + i\delta, \qquad \partial\!\!\!/_A(\psi) = 0$$

を考える（ここで記号の説明は敢えてしない[5]）．この方程式の解空間としてモジュライ空間 $\mathcal{M}_K$ が定義される．本来の解空間 $\mathcal{B}_K$ は $\mathbb{C}P^\infty$ にホモトピー同値な無限次元空間であるが，ゲージ変換を法として $\mathcal{B}_K$ の商空間を考えることにより，その商空間 $\mathcal{B}_K/\{$ ゲージ変換 $\} = \mathcal{M}_K$ は M 上の Riemann 計量 g の選び方や方程式の摂動 δ の取り方などには依存せず，有限次元の向きづけ可能な閉多様体になることが知られている．その次元は，Atiyah-Singer の指数定理により計算され

$$\dim \mathcal{M}_K = \frac{1}{4}\left(K^2 - (3\tau(M) + 2\chi(M))\right)$$

で与えられる．ここで $\tau(M)$ は M の符号数，$\chi(M)$ は Euler 標数，$K^2 = \langle K \cup K, [M] \rangle \in \mathbb{Z}$ である．$3\tau(M) + 2\chi(M)$ という項は第 8 章の補足で，概複素構造の存在条件としても登場した．

---

[3] $V = H^2(M; \mathbb{Z})/\mathrm{torsion}$ が捻れ部分群で割られている理由は，それが Ker Q_M に属するので，torsion 部分は諸々の定義に必要ないからである．

[4] さらに Poincaré 双対定理から，

$$\chi(M) = 2 + 2b_1(M) + b_2(M) \equiv b_2(M) \equiv b^+ - b^- = \tau(M) \pmod 2$$

を得る．この議論は一般次元の閉多様体に対しても中間次元の（コ）ホモロジー群に注目してそのまま成り立つ．問 12.2 参照．

[5] 最近，Seiberg-Witten 理論を解説した本が多く出版されている．日本語で読めるのは

J. W.Morgan 著（二木昭人訳）『サイバーグ・ウイッテン理論とトポロジー』培風館, 1998 年

が手頃でわかりやすいので，モノポール方程式を含めて詳しくはこちらを参照していただきたい．

b_2^+ が奇数ならば，$\dim \mathcal{M}_K$ は偶数であることを示そう．まずは，代数学でよく知られた $\mathbb{Z}$ 上の非退化対称双一次形式の理論から，それを我々の設定に適用して，任意の特性元 K に対して

$$K^2 \equiv \tau(M) \pmod 8$$

が成り立つ．そこで，$K^2 - \tau(M) = 8k \ (k \in \mathbb{Z})$ とおこう．M は単連結だから $b_1(M) = 0$ で，Poincaré 双対定理から $b_3(M) = 0$ である．よって，M は連結で向きづけ可能であることに注意して，$\chi(M) = 2 + b_2(M) = 2 + b^+ + b^-$ となる．すると

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{M}_K &= \frac{1}{4}(\tau + 8k - (3\tau + 2\chi)) \\ &= \frac{1}{4}(8k - 2(\tau + \chi)) \\ &= 2k - (1 + b^+)\end{aligned}$$

となるので，$b_2^+(M)$ が奇数ならば確かにモジュライ空間 $\mathcal{M}_K$ の次元は偶数である．同じくこの計算から，$b_2^+(M)$ が偶数ならば $\mathcal{M}_K$ の次元は奇数である．ところで，$\mathcal{B}_K$ は $\mathbb{C}P^\infty$ にホモトピー同値なので

$$H^{2n}(\mathcal{B}_K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\mu^{2n}] \quad \text{で，} \mu \in H^2(\mathcal{B}_K;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \quad \text{は生成元}$$

である．こうして，$\dim \mathcal{M}_K = 2m$ とおくとき，**Seiberg-Witten 不変量**が写像

$$SW_M : \mathcal{C}_M \to \mathbb{Z},\ SW_M(K) = \langle \mu^m, [\mathcal{M}_K] \rangle$$

により定義される（$\dim \mathcal{M}_K$ が奇数ならば，$[\mathcal{M}_K] \in H^{2n+1}(\mathcal{B}_K;\mathbb{Z}) = 0$ であることに注意）．

定義 12.A

(i) $SW_M(K) \neq 0$ のとき，コホモロジー類 $K \in \mathcal{C}_M \subset H^2(M;\mathbb{Z})$ を **Seiberg-Witten 類**とよぶ．

(ii) 単連結 4 次元閉多様体 M が与えられたとき，Seiberg-Witten 類 K が

$$K^2 = c_1^2(M) = 3\tau(M) + 2\chi(M)$$

を満たすとき，すなわちモジュライ空間 $\mathcal{M}_K$ の次元が 0 のとき，M を**単純型**という．例えば，M が概複素多様体ならば単純型である（第 8 章の補足を参照）．

Seiberg-Witten 類は有限個であることが知られている．また，単純型でない 4 次元多様体はまだ発見されていない．

Seiberg-Witten 不変量の基本性質を列挙してみよう．

定理 12.B　M を滑らかで向きづけられた単連結 4 次元閉多様体で，$b_2^+(M) > 1$ かつ奇数を満たすものとする．

(i) $M = M_1 \sharp M_2$ で，$b_2^+(M_i) > 0\ (i = 1,2)$ ならば，$SW_M \equiv 0$ である．

(ii) M が正のスカラー曲率をもつ計量を許容するならば，$SW_M \equiv 0$ である．

(iii) M に埋め込まれた 2 次元球面 Σ で，その自己交点数が非負であり，2 次元ホモロジー類として自明でないようなものが存在すれば，$SW_M \equiv 0$ である．

(iv) S を単連結な複素曲面で，$b_2^+(S) > 1$ を満たせば，$SW_S(c_1(S)) \neq 0$ である．

(v) (X, ω) を非退化な 2-形式 ω をもつ単連結 4 次元シンプレクティック多様体で，$b_2^+(X) > 1$ を満たせば，$SW_X(c_1(X, \omega)) = \pm 1$ である．

(i), (ii), (iii) はいわゆる "消滅定理 (vanishing theorem)" であり，(iv), (v) は "非消滅定理 (non-vanishing theorem)" である．この基本定理の手軽な応用を一つ述べよう．

S を（今までにも何度か登場した）K3 曲面とする．S は単連結な複素曲面である．そこで，

$$X = S \sharp \overline{\mathbb{C}P^2}, \quad Y = \sharp_3 \mathbb{C}P^2 \sharp_{20} \overline{\mathbb{C}P^2}$$

とする．S の交点行列 A_S は

$$A_S = E_8 \oplus E_8 \oplus H \oplus H \oplus H,$$

ただし

$$E_8 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．そこで，S に $\overline{\mathbb{C}P^2}$ を連結和することにより，X の交点行列は（適当に生成元を選び直して），

$$A_X = \langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle \oplus \langle 1 \rangle \oplus \underbrace{\langle -1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle -1 \rangle}_{20\ \text{個の直和}}$$

となる．つまり，X と Y の交点行列は等しくなる．そこで，5 章の補足でも触れた M. H. Freedman の位相分類定理をもう少し詳しく述べておこう．

定理 12.C (M. H. Freedman, 1981) $X_i^4\ (i = 1, 2)$ を単連結 4 次元閉多様体とする．
(i) 交点行列 A_{X_i} が II 型ならば

$$A_{X_1} \cong A_{X_2} \iff X_1 \approx X_2 \ (\text{同相})$$

(ii)　交点行列 A_{X_i} が I 型ならば

$$A_{X_1} \cong A_{X_2} \quad \text{かつ} \quad ks(X_1) = ks(X_2) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1 \approx X_2 \ (\text{同相})$$

ここで，A_X が **II** 型であるとは，任意の $x \in H_2(X;\mathbb{Z})$ に対して $Q(x,x) \equiv 0 \pmod 2$ が成り立つときをいい，そうでないとき **I** 型であるという．また，$ks(X)$ は Kirby-Siebenmann 類とよばれるあるコホモロジー類 $ks(X) \in H^4(X;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ である．

特に，X^4 が 4 次元球面 S^4 とホモトピー同値ならば，A_{X^4} は零行列であり，(i) より S^4 であることがしたがう（4 次元 Poincaré 予想の解決）．

さて，定理 12.C を我々の 4 次元多様体 X, Y に適用すれば，直ちに

$$X \approx Y \ (\text{同相})$$

が得られる．そこで，もし $X \cong Y$（微分同相）と仮定すると

$$SW_X = SW_Y \tag{12.D}$$

となるはずである．Y に対して，定理 12.B (i) を適用すると，$SW_Y \equiv 0$ を得る．一方，X に対しては定理 12.B (iv) が適用できて

$$SW_X(c_1(X)) \neq 0 \tag{12.E}$$

を得る[6]ので，(12.D) に矛盾する．したがって，X と Y は同相だが微分同相にはなり得ないことがわかる．与えられた 4 次元多様体上に異なる微分構造が存在することが，これほど手軽に導出できることは Seiberg-Witten 不変量の強力さを如実に物語っている．

---

[6] ここで，Chern 類 $c_1(X)$ が定まる理由は，一般に複素曲面 S に $\overline{\mathbb{C}P^2}$ を連結和するという操作は，複素曲面のカテゴリーにおける “ブローアップ” に対応し，このカテゴリーの中で閉じていることが知られているからである．例えば，川又雄二郎著『代数多様体論』（共立出版）の第 2 章参照．

第13章　ゲージ場理論におけるアノマリー

素粒子物理学におけるモデルを構成する上で，対称性は最も重要な要素の一つである．対称性は理論の繰り込み可能性やユニタリー性を保証する上で重要な役割を果たす．モデルのラグランジアンは観測されている対称性を満たすように選ばなければならない．しかし，ラグランジアンがもつ対称性は古典的であることに注意されたい．ラグランジアンの対称性は量子的な対称性，すなわち有効作用の対称性を保証するものではない．ラグランジアンの古典的な対称性が量子化の過程で損なわれる場合，その理論は**アノマリー**をもつという．場の理論には，カイラル・アノマリー，ゲージ・アノマリー，重力アノマリー，超対称性アノマリーなど様々なタイプのアノマリーがある．各形容詞は対象となる対称性を表している．この章ではゲージ理論に現れるアノマリーの微分幾何学的および位相幾何学的な構造を調べよう．[1]

この章の内容は，Alvarez-Gaumé (1985)，Albarez-Gaumé and Ginsparg (1985) および Sumitani (1985) に沿っている．

13.1　序節

アノマリーにたいする位相および微分幾何学的な方法を紹介する前に，このテーマ自身について手短に解説しよう．ψ を 4 次元空間で外部ゲージ場 $\mathcal{A}_\mu = A_\mu{}^\alpha T_\alpha$ と相互作用する質量 0 の Dirac 場とする．ここに $\{T_\alpha\}$ はコンパクト，半単純なゲージ群 G (例えば $\mathrm{SU}(N)$) の反 Hermite な生成子である．この理論は，ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu)\psi \tag{13.1}$$

によって記述される．このラグランジアンは，通常の（局所）ゲージ変換

$$\psi(x) \to g^{-1}\psi(x) \qquad \mathcal{A}_\mu(x) \to g^{-1}[\mathcal{A}_\mu(x) + \partial_\mu]g \tag{13.2}$$

のもとで不変である．また，このラグランジアンは**カイラル対称性**と呼ばれる大域的対称性

$$\psi(x) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_5\alpha}\psi(x) \qquad \bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma_5\alpha} \tag{13.3}$$

をもっている．この対称性から導かれるカイラル・カレント j_5 は

$$j_5^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{13.4}$$

[1] 最近，アノマリーに関し，詳しい解説をした本が出版された．R.A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory* Oxford (1996). 本節と比較されたい．

で与えられる．一般に，ラグランジアンがもつ対称性が量子化のもとで維持されるかというのは，決して自明な問いではない．実際，$\mathcal{L}$ のカイラル対称性が量子レベルで壊れることが示されている．Adler (1969) と Bell and Jackiw (1969) は，1 本の軸性カレントと 2 本のベクトル・カレントをもつ三角ダイアグラムを計算して，ナイーブな保存則 $\partial_\mu j_5^\mu = 0$ が破れて

$$\begin{aligned}\partial_\mu j_5^\mu &= \frac{1}{16\pi^2}\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathrm{tr}\mathcal{F}_{\kappa\lambda}\mathcal{F}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\mathrm{tr}\left[\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\partial_\kappa\left(\mathcal{A}_\lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\nu + \frac{2}{3}\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\right)\right]\end{aligned} \tag{13.5}$$

となることを示した．ここに tr は群の添字に関する跡である．(13.5) 式に現れる j_5^μ は群の添字をもたず，したがって (13.5) 式は**可換アノマリー**とよばれる．

次に，群の添字をもつカレントの振る舞いを調べよう．外部ゲージ場と結合する Weyl フェルミオン ψ を考える．この理論の非可換ゲージ・カレントもアノマリーをもつ保存則を満たす．これを**非可換アノマリー** という．この理論のラグランジアンは

$$\mathcal{L} \equiv \psi^\dagger(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,)\mathcal{P}_+\psi \qquad \mathcal{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \tag{13.6}$$

で与えられる．このラグランジアンはゲージ対称性

$$\mathcal{A}_\mu \to g^{-1}(\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu)g, \qquad \psi \to g^{-1}\psi \tag{13.7}$$

をもっている．これに対する非可換カレントは

$$j^{\mu\alpha} \equiv \psi^\dagger\gamma^\mu T^\alpha\mathcal{P}_+\psi \tag{13.8}$$

で与えられる．Bardeen (1969) と Gross and Jackiew (1972) は，1-ループまでの計算で，カレントは保存されず

$$(\mathcal{D}_\mu j_5^\mu)^\alpha = \frac{1}{24\pi^2}\mathrm{tr}\left[T^\alpha\partial_\kappa\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\left(\mathcal{A}_\lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\nu + \frac{1}{2}\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\right)\right] \tag{13.9}$$

となることを示した．一見すると (13.5) 式と (13.9) 式の右辺はとてもよく似ている．しかし，全体の係数と数値ファクター $\frac{2}{3}$ と $\frac{1}{2}$ の違いは深いトポロジカルな起源をもっている．後ほど $(2l+2)$ 次元の可換アノマリーと $2l$ 次元の非可換アノマリーは予期せぬ具合に密接に関係していることが示される．

13.2　可換アノマリー

今後，Euclid 符号をもつ偶数次元の多様体 M ($\mathrm{dim}M = m = 2l$) を扱う．$m = 4$ と置くだけで 4 次元における結果が直ちに得られる．考えている系は非カイラル，すなわちゲージ場が右手成分と左手成分に同じように結合するものとする．以下

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^\mu, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}, \quad \gamma^{m+1} = (\mathrm{i})^l\gamma^1\ldots\gamma^m$$
$$\gamma^{m+1\dagger} = \gamma^{m+1}, \qquad (\gamma^{m+1})^2 = +1$$

という習慣に従う．Lie 群の生成子 $\{T_\alpha\}$ は

$$T^\dagger{}_\alpha = -T_\alpha, \qquad [T_\alpha, T_\beta] = f_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma, \qquad \mathrm{tr}(T^\alpha T^\beta) = -\frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}$$

を満たす．

13.2.1 Fujikawa の方法

アノマリーを導くいくつかの方法のうちで，そのトポロジカルな特徴と幾何学的な特徴を最も直接的に明らかにするのは **Fujikawa の方法** (Fujikawa 1979, 1980, 1986) である．この方法は，関連した指数定理の熱核による証明と同値である．

ψ を 外部 非可換ゲージ場 $\mathcal{A}_\mu$ と相互作用している，質量 0 の Dirac 場とする．有効作用 $W[\mathcal{A}]$ は

$$\mathrm{e}^{-W[\mathcal{A}]} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x\bar{\psi}\mathrm{i}\nabla\!\!\!/\psi} \tag{13.10}$$

で与えられる．ここに $\mathrm{i}\nabla\!\!\!/ = \mathrm{i}\gamma^\mu\nabla_\mu = \mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \omega_\mu + \mathcal{A}_\mu)$ で $\omega_\mu = \frac{1}{2}\omega_{\mu\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}$ は背景となる空間におけるスピン接続である．空間は，その幾何学（すなわちスピン接続）が何の役割も果たさないようにコンパクト化されているものとする．例えばこれは $\mathbb{R}^4$ を Dirac 種数 $\hat{A}(TM)$ が自明である $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ へコンパクト化することにより達成できる (例 12.5 を見よ)．この仮定が成り立つ場合，スピン接続は問題ではなくなり，$i\nabla\!\!\!/$ から落とすことができる．古典的な作用 $\int \mathrm{d}x\bar{\psi}\mathrm{i}\nabla\!\!\!/\psi$ はカイラル回転

$$\psi \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^{m+1}\alpha}\psi, \qquad \bar{\psi} \to \bar{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma^{m+1}\alpha} \tag{13.11}$$

のもとで不変である．ψ と $\bar{\psi}$ を

$$\psi = \sum_i a_i\psi_i, \qquad \bar{\psi} = \sum_i \bar{b}_i{\psi^\dagger}_i \tag{13.12}$$

と展開しよう．a_i と $\bar{b}_i$ は

$$\{a_i, a_j\} = 0, \qquad \{\bar{b}_i, \bar{b}_j\} = 0, \qquad \{a_i, \bar{b}_j\} = 0$$

を満たす反可換な Grassmann 変数で ψ_i は Dirac 作用素

$$\mathrm{i}\nabla\!\!\!/\psi_i = \lambda_i\psi_i \tag{13.13}$$

の固有ベクトルである．$\mathrm{i}\nabla\!\!\!/$ は Hermite 演算子であるので λ_i は実数である．M はコンパクトであるので ψ_i は

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \int \mathrm{d}x{\psi^\dagger}_i(x)\psi_j(x) = \delta_{ij}$$

と規格化できる．このようにして $\psi, \bar{\psi}$ に関する経路積分は，$a_i, \bar{b}_i$ に関する経路積分に置きかえられる．

無限小カイラル変換

$$\psi(x) \to \psi(x) + \mathrm{i}\alpha(x)\gamma^{m+1}\psi(x) \tag{13.14a}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x) + \mathrm{i}\bar{\psi}(x)\alpha(x)\gamma^{m+1} \tag{13.14b}$$

を考えよう．$\alpha = \alpha(x)$ は座標 x に依存するものとする．この変換のもとで，古典的作用は

$$\int \mathrm{d}x\bar{\psi}\mathrm{i}\nabla\!\!\!/\psi \quad \to \quad \int \mathrm{d}x(\bar{\psi} + \mathrm{i}\bar{\psi}\alpha\gamma^{m+1})\mathrm{i}\nabla\!\!\!/(\psi + \mathrm{i}\alpha\gamma^{m+1}\psi)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int dx\bar{\psi}i \nabla\!\!\!\!/\, \psi + i\int dx\left[\alpha\bar{\psi}\gamma^{m+1}i \nabla\!\!\!\!/\, \psi + \bar{\psi}i \nabla\!\!\!\!/\, (\alpha\gamma^{m+1}\psi)\right] \\
&= \int dx\bar{\psi}i \nabla\!\!\!\!/\, \psi - \int dx\big[\alpha\bar{\psi}\gamma^{m+1}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \mathcal{A}_{\mu})\psi \\
&\quad +\bar{\psi}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \mathcal{A}_{\mu})(\alpha\gamma^{m+1}\psi)\big] \\
&= \int dx\bar{\psi}i \nabla\!\!\!\!/\, \psi + \int dx\alpha(x)\partial_{\mu}j^{\mu}_{m+1}(x)
\end{aligned} \tag{13.15}
$$

と変換する．ここに，反交換関係 $\{\gamma^{\mu},\gamma^{m+1}\}=0$ を用いた．

$$
j^{\mu}_{m+1}(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^{m+1}\psi(x) \tag{13.16}
$$

は**カイラル・カレント**とよばれる．これは以前定義された j^{μ}_{5} の m 次元版である．(13.15) が (13.14) によって引き起こされた唯一の変化であれば，Ward-Takahashi 恒等式をナイーブに用いて，軸性カレントの保存 $\partial_{\mu}j^{\mu}_{m+1}=0$ が導かれる．しかし量子論ではもう一つの変化，すなわち経路積分の <u>測度</u> の変化が存在する．カイラル回転された場を

$$
\psi' = \psi + i\alpha\gamma^{m+1}\psi = \sum a'_i\psi_i \tag{13.17a}
$$

$$
\bar{\psi}' = \bar{\psi} + i\bar{\psi}\alpha\gamma^{m+1} = \sum \bar{b}'_i\psi^{\dagger}_i \tag{13.17b}
$$

で定義する．すると測度は

$$
\int\prod_i da_i d\bar{b}_i \to \int\prod_i da'_i d\bar{b}'_i \tag{13.18}
$$

のように変化する．$\{\psi_i\}$ の正規直交性から

$$
\begin{aligned}
a'_i &= \langle\psi_i|\psi'\rangle = \langle\psi_i|(1+i\alpha\gamma^{m+1})\psi\rangle \\
&= \sum_j\langle\psi_i|(1+i\alpha\gamma^{m+1})\psi_j\rangle a_j \equiv \sum_j C_{ij}a_j
\end{aligned} \tag{13.19a}
$$

が得られる．ここに

$$
C_{ij} = \langle\psi_i|(1+i\alpha\gamma^{m+1})\psi_j\rangle = \delta_{ij} + i\alpha\langle\psi_i|\gamma^{m+1}\psi_j\rangle \tag{13.20}
$$

である．新しい変数による測度は

$$
\begin{aligned}
\prod da'_j &= [\det C_{ij}]^{-1}\prod da_i = \exp(-\mathrm{tr}\ln C_{ij})\prod da_i \\
&= \exp[-\mathrm{tr}\ln(\mathbf{1} + i\alpha\langle\psi_i|\gamma^{m+1}\psi_j\rangle)]\prod da_i \\
&\approx \exp(-\mathrm{tr}i\alpha\langle\psi_i|\gamma^{m+1}\psi_j\rangle)\prod da_i \\
&= \exp(-i\alpha\sum_i\langle\psi_i|\gamma^{m+1}\psi_i\rangle)\prod da_i
\end{aligned} \tag{13.21}
$$

となる．a_i, a'_i が Grassmann 数であるために，行列式が分母に現れていることに注意されたい (Berezin (1966) を見よ)．[例えば，実 Grassmann 数 a に対し $\int a da = \int ca d(ca) = 1, c\in\mathbb{R}$ である．したがって $d(ca) = da/c$ となる．] $\bar{b}_i \to \bar{b}'_i$ に対しても

$$
\bar{b}'_i = \sum_j \bar{b}_j\langle\psi_j|(1+i\alpha\gamma^{m+1})|\psi_i\rangle = \sum_j C_{ji}\bar{b}_j \tag{13.19b}
$$

となる．変換 $\bar{b}_i \to \bar{b}'_i$ の Jacobi 行列式は (13.21) と一致する．したがって，カイラル変換 (13.17) のもとで測度は

$$\prod_i \mathrm{d}a_i \mathrm{d}\bar{b}_i \to \prod_i \mathrm{d}a'_i \mathrm{d}\bar{b}'_i \exp\left(-2\mathrm{i}\int \mathrm{d}x\alpha(x)\sum \psi_n^\dagger(x)\gamma^{m+1}\psi_n(x)\right) \tag{13.22}$$

と変換する．さて，有効作用は 2 つの方法で表され

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-W[\mathcal{A}]} &= \int\prod_i \mathrm{d}a_i \mathrm{d}\bar{b}_i \exp\left(-\int \mathrm{d}x\bar{\psi}\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,\psi\right) \\ &= \int\prod_i \mathrm{d}a'_i \mathrm{d}\bar{b}'_i \\ &\quad\times\exp\left(-\int \mathrm{d}x\bar{\psi}\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,\psi - \int \mathrm{d}x\alpha(x)\partial_\mu j^\mu_{m+1}(x) - 2\mathrm{i}\int \mathrm{d}x\alpha(x)\boldsymbol{A}(x)\right) \end{aligned} \tag{13.23}$$

とかかれる．ここに

$$\boldsymbol{A}(x) \equiv \sum_i \psi^\dagger{}_i(x)\gamma^{m+1}\psi_i(x) \tag{13.24}$$

である．$\alpha(x)$ は任意であるので

$$\partial_\mu j^\mu_{m+1}(x) = -2\mathrm{i}\boldsymbol{A}(x) \tag{13.25}$$

が得られた．したがって，量子論では軸性カレントのナイーブな保存則は成り立たない．j^μ_{m+1} の非保存は**可換アノマリー**，または**カイラル・アノマリー**，**軸性アノマリー** とよばれる．

この関係式はどのようにトポロジーと関係しているのだろうか？ Jacobi 行列式 (13.22) において $\alpha(x)$ を x に独立な定数とする．[すなわち 0 運動量の Ward-Takahashi 関係式を調べる．] (13.22) 式の中の積分は意味がなく，正則化されなければならない．そこで Gauss 的なカット・オフを

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x\boldsymbol{A}(x) &= \int \mathrm{d}x\sum_i \psi^\dagger{}_i(x)\gamma^{m+1}\psi_i(x)\exp[-(\lambda_i/M)^2]|_{M\to\infty} \\ &= \sum\langle\psi_i|\gamma^{m+1}\exp[-(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,/M)^2]|\psi_i\rangle|_{M\to\infty} \end{aligned} \tag{13.26}$$

のように導入する (**熱核による正則化**). (13.26) 式で $1/M^2$ は前章の‘時間’パラメタ t に対応し，極限 $M\to\infty$ は $t\to\varepsilon$ を意味する．$|\psi_i\rangle$ を $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/$ の固有値 λ_i の固有状態としよう．すると，固有状態の中に $|\psi_i\rangle^\chi \equiv \gamma^{m+1}|\psi_i\rangle$ という，固有値 $-\lambda_i$ の状態が存在する：

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,|\psi_i\rangle^\chi &= \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,\gamma^{m+1}|\psi_i\rangle = -\gamma^{m+1}\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,|\psi_i\rangle \\ &= -\lambda_i\gamma^{m+1}|\psi_i\rangle = -\lambda_i|\psi_i\rangle^\chi \end{aligned}$$

ここで反交換関係 $\{\gamma^{m+1},\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,\}=0$ を用いた．$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/$ は Hermite 演算子であるから，相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．したがって $\langle\psi_i|\psi_i\rangle^\chi = \langle\psi_i|\gamma^{m+1}|\psi_i\rangle = 0$ となる．このことから

$$\langle\psi_i|\gamma^{m+1}\exp[-(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,/M)^2]|\psi_i\rangle = \langle\psi_i|\gamma^{m+1}|\psi_i\rangle\exp[-(\lambda_i/M)^2] = 0$$

が示された．したがって (13.26) の右辺への寄与はゼロ・エネルギーのモードからのみ生じる．$\mathrm{i}\not{\nabla}$ のゼロ・エネルギー・モードを $|0,i\rangle$ とする $(1 \leq i \leq n_0)$．これらのモードはスピン代数の既約表現ではなく，γ^{m+1} の固有値（カイラリティ）によって分類されなければならない．そこで

$$\gamma^{m+1}|0,i\rangle_\pm = \pm|0,i\rangle_\pm \tag{13.27}$$

としよう．すると (13.26) 式は

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x \boldsymbol{A}(x) &= \sum \langle\psi_i|\gamma^{m+1}\exp[-(\mathrm{i}\not{\nabla}/M)^2]|\psi_i\rangle|_{M\to\infty} \\ &= \sum_i{}_+\langle 0,i|0,i\rangle_+ - \sum_i{}_-\langle 0,i|0,i\rangle_- \\ &= \nu_+ - \nu_- = \mathrm{ind}\,\mathrm{i}\not{\nabla}_+ \end{aligned}\tag{13.28}$$

となる．ここに ν_+ (ν_-) は正（負）のカイラリティをもつゼロ・エネルギー・モードの数である（$\nu_+ + \nu_- = n_0$）で $\mathrm{i}\not{\nabla}_+$ は

$$\mathrm{i}\not{\nabla} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\not{\nabla}_- \\ \mathrm{i}\not{\nabla}_+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{i}\not{\nabla}_- = (\mathrm{i}\not{\nabla}_+)^\dagger$$

で定義される演算子である．ここで Atiyah-Singer の指数定理の出番である．

(13.28) 式が実際ある Chern 指数の積分を表していることを示すために，まず

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\not{\nabla})^2 &= -\gamma^\mu\gamma^\nu\nabla_\mu\nabla_\nu = -\{\delta^{\mu\nu} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\}\frac{1}{2}[\{\nabla_\mu,\nabla_\nu\} + \mathcal{F}_{\mu\nu}] \\ &= -\nabla_\mu\nabla^\mu - \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\mathcal{F}_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{13.29}$$

に注意しよう．ここで $[\nabla_\mu,\nabla_\nu] = \mathcal{F}_{\mu\nu}$ を用いた．すると

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_i \langle\psi_i|x\rangle\langle x|\gamma^{m+1}\exp\left[\left(\nabla^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\mathcal{F}_{\mu\nu}\right)/M^2\right]|\psi_i\rangle\bigg|_{M\to\infty} \tag{13.30}$$

となる．ここで，議論を具体的にするために $m=4$ とおこう．平面波の基底 $|k\rangle$ を

$$\langle x|\psi_i\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\langle x|k\rangle\langle k|\psi_i\rangle$$

で導入しよう．すると (13.30) は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(x) &= \int\frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}k'}{(2\pi)^4}\sum_i\langle\psi_i|k'\rangle\langle k'|x\rangle \\ &\quad\times\gamma^{m+1}\exp\left[\left(\nabla^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\mathcal{F}_{\mu\nu}\right)/M^2\right]\langle x|k\rangle\langle k|\psi_i\rangle\bigg|_{\substack{M\to\infty\\ y\to x}} \\ &= \int\frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^4}\mathrm{tr}\gamma^{m+1}\exp\left[\left(-k^2 + \frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\mathcal{F}_{\mu\nu}\right)/M^2\right]_{M\to\infty}\end{aligned}\tag{13.31}$$

となる．ここに，完全性関係

$$\sum_i\langle k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|k'\rangle = (2\pi)^4\delta^4(k-k')$$

を用いた．(13.31) 式で ∇^2 を表象 $-k^2$ で置き換えた．これは $\mathcal{A}$ を含む残りの項は $M\to\infty$ の極限でゼロとなるからである．$\tilde{k}^\mu\equiv k^\mu/M$ とおくと (13.31) 式は

$$\boldsymbol{A}(x)=\mathrm{tr}\left[\gamma^5\exp\left(\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\mathcal{F}_{\mu\nu}/M^2\right)\right]M^4\int\frac{\mathrm{d}\tilde{k}}{(2\pi)^4}\exp(-\tilde{k}^2)$$

となる．最初の指数関数を展開し

$$\mathrm{tr}\gamma^5=\mathrm{tr}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu=0,\qquad \mathrm{tr}\gamma^5\gamma^\kappa\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu=-4\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu},\qquad \int\mathrm{d}\tilde{k}\exp(-\tilde{k}^2)=\pi^2$$

を用いると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(x)&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\gamma^5\frac{1}{4^2}\{[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\mathcal{F}_{\mu\nu}\}^2\right]\frac{1}{16\pi^2}\\&=\frac{-1}{32\pi^2}\mathrm{tr}\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{F}_{\kappa\lambda}(x)\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)\end{aligned}\tag{13.32}$$

が得られる．指数関数の展開で高次の項は $M\to\infty$ の極限でゼロとなることに注意されたい．このようにして，アノマリーをもつ保存則 (13.25) は

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu_{m+1}&=\frac{1}{16\pi^2}\mathrm{tr}\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\mathcal{F}_{\kappa\lambda}\mathcal{F}_{\mu\nu}\\&=\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{tr}\left[\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\partial_\kappa\left(\mathcal{A}_\lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\nu+\frac{2}{3}\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\right)\right]\end{aligned}\tag{13.33}$$

となる．これは Atiyah-Singer の指数定理の局所版とみなすことができる．(13.33) 式を場の強さ $\mathcal{F}=\frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$ を用いて書き下すと

$$\nu_+-\nu_-=\int_M\mathrm{d}x\partial_\mu j^\mu_{m+1}=\int_M\mathrm{ch}_2(\mathcal{F})\tag{13.34}$$

となる．これは自明な幾何 ($\hat{A}(TM)=1$) をもつ多様体 M 上の捻れスピン複体 に対する指数定理に他ならない．

一般に $\dim(M)=m=2l$ のときは，

$$\nu_+-\nu_-=\int_M\mathrm{d}x\partial_\mu j^\mu_{m+1}=\int_M\mathrm{ch}_l(\mathcal{F})=\int_M\frac{1}{l!}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\mathcal{F}}{2\pi}\right)^l\tag{13.35}$$

が得られる．

13.3 非可換アノマリー

前節ではゲージ 1 重項（ゲージ群の添字をもたない）であるカイラル・カレントを考えた．ここでは，ゲージ群の添字 α をもつゲージ・カレント $j^\mu{}_\alpha$ を考察しよう．ゲージ場 $\mathcal{A}$ が左向きの Weyl フェルミオン ψ とのみ結合するカイラルな理論を考える．ψ はゲージ群 G の複素表現 $\boldsymbol{r}$ にしたがって変換するものとする．例えば，ψ は SU(3) の $\mathbf{3}$ に属するとする．有効作用 $W_r[\mathcal{A}]$ は

$$\mathrm{e}^{-W_r[\mathcal{A}]}=\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\exp\left(-\int\mathrm{d}x\bar{\psi}\mathrm{i}\not{\nabla}_+\psi\right)\tag{13.36}$$

で与えられる．ここに

$$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_{+} = \mathrm{i}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \mathcal{A}_{\mu})\mathcal{P}_{+}; \qquad \mathcal{P}_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^{m+1}) \tag{13.37}$$

である．ゲージ・カレントは

$$j^{\mu}{}_{\alpha} = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{\mu}T_{\alpha}\mathcal{P}_{+}\psi \tag{13.38}$$

で定義される．$v = v^{\alpha}T_{\alpha}$ を無限小ゲージ変換のパラメタとすると $g = 1 - v$ となり，このときゲージ場は

$$\mathcal{A}_{\mu} \to (1 + v)(\mathcal{A}_{\mu} + \mathrm{d})(1 - v) = \mathcal{A}_{\mu} - \mathcal{D}_{\mu}v \tag{13.39}$$

と変換する．ここに $\mathcal{D}_{\mu}v = \partial_{\mu}v + [\mathcal{A}_{\mu}, v]$ である．有効作用は

$$\begin{aligned} W_r[\mathcal{A}] &\to W_r[\mathcal{A} - \mathcal{D}v] \\ &= W_r[\mathcal{A}] - \int \mathrm{d}x\ \mathrm{tr}\left(\mathcal{D}v\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}}W_r[\mathcal{A}]\right) \\ &= W_r[\mathcal{A}] - \int \mathrm{d}x\ \mathrm{tr}(\partial_{\mu}v^{\alpha} + f_{\alpha\beta\gamma}A_{\mu}{}^{\beta}v^{\gamma})\frac{\delta}{\delta A_{\mu}{}^{\alpha}}W_r[\mathcal{A}] \\ &= W_r[\mathcal{A}] + \int \mathrm{d}x\ \mathrm{tr}\left(v^{\alpha}\mathcal{D}\frac{\delta}{\delta\mathcal{A}}W_r[\mathcal{A}]_{\alpha}\right) \end{aligned} \tag{13.40}$$

ここで

$$\frac{\delta}{\delta A_{\mu}{}^{\alpha}}W_r[\mathcal{A}] = \langle \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma^{\mu}T_{\alpha}\frac{1}{2}(1 + \gamma^{m+1})\psi\rangle_{\mathcal{A}} = \langle j^{\mu}{}_{\alpha}\rangle$$

より

$$W_r[\mathcal{A} - \mathcal{D}v] - W_r[\mathcal{A}] = \int \mathrm{d}x\mathrm{tr}(v^{\alpha}\mathcal{D}_{\mu}\langle j^{\mu}\rangle_{\alpha}) \tag{13.41}$$

が得られる．

ここで，ナイーブには (13.36) の右辺を ‘$\det(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_{+}) = \prod \lambda_i$’ とみなしそうである．ここに λ_i は $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_{+}$ の ‘固有値’ である．ここで微妙な点が生じる：$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_{+}$ は $S_{+} \otimes E$ の切断を $S_{-} \otimes E$ の切断へ写像する．ここに E は G-束に付随するベクトル束で $S_{\pm}$ はカイラリティ $\pm$ のスピン束である．したがって $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_{+}\psi = \lambda\psi$ という固有値方程式は無意味である．この困難を克服するために，形式的に Dirac スピノル ψ を導入し

$$\mathrm{e}^{-W_r[\mathcal{A}]} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\exp\left(-\int \mathrm{d}x\bar{\psi}\mathrm{i}\hat{D}\psi\right) \tag{13.42}$$

と定義する．ここに γ^{m+1} を対角化すると $\mathrm{i}\hat{D}$ は

$$\mathrm{i}\hat{D} \equiv \mathrm{i}\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \mathrm{i}\mathcal{A}_{\mu}\mathcal{P}_{+}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_{-} \\ \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_{+} & 0 \end{pmatrix} \tag{13.43}$$

で定義される．(13.43) 式でゲージ場 $\mathcal{A}$ は正のカイラリティをもつ場のみと結合する．このようにして固有値問題 $\mathrm{i}\hat{D}\psi_i = \lambda_i\psi_i$ は意味をもつようになった．$\mathrm{i}\hat{D}$ は Hermite ではなく，したがって一般に λ_i は複素数である．さらに

$$\mathrm{i}\hat{D}\psi_i = \lambda_i\psi_i \tag{13.44a}$$

$$\chi^\dagger{}_i(\mathrm{i}\,\overleftarrow{\hat{D}}) = \lambda_i \chi^\dagger{}_i \qquad (\mathrm{i}\hat{D})^\dagger \chi_i = \bar{\lambda}_i \chi_i \tag{13.44b}$$

のように，右と左の固有関数を独立に導入しなければならない．$i \neq j$ のときは $\int \chi_i^\dagger \psi_j dx = 0$ であるから $\{\chi_i\}$ として正規直交系を選ぶことができる：

$$\int \chi^\dagger{}_i \psi_j \mathrm{d}x = \delta_{ij} \tag{13.45}$$

λ_i はゲージ不変ではないことに注意しよう．これは

$$\begin{aligned} g(\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^g))g^{-1} &= g\mathrm{i}\gamma^\mu[\partial_\mu + g^{-1}(\mathcal{A}_\mu + \partial_\mu)g\mathcal{P}_+]g^{-1} \\ &= \mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}) - \mathrm{i}\,\partial\!\!\!/\, g g^{-1} + \mathrm{i}\,\partial\!\!\!/\, g g^{-1}\mathcal{P}_+ \neq \mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}) \end{aligned} \tag{13.46}$$

から導かれる．[もし (13.46) 式で等号が成立するならば，$\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A})\psi_i = \lambda_i\psi_i$ のとき $g^{-1}\psi_i$ は $\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^g)g^{-1}\psi_i = \lambda_i g^{-1}\psi_i$ を満たす．すると Spec $\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A})$ はゲージ不変となる．] 各固有値はゲージ不変ではないが $\mathrm{i}\hat{D}$ の固有値の積の絶対値はゲージ不変である．実際 $\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_+ = (\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_-)^\dagger$ および $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_- = (\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_+)^\dagger$ とすると

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{i}\hat{D})\det((\mathrm{i}\hat{D})^\dagger) &= \det(\mathrm{i}\hat{D}(\mathrm{i}\hat{D})^\dagger) \\ &= \det\begin{pmatrix} (\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_-)(\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_+) & 0 \\ 0 & (\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_+)(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_-) \end{pmatrix} \\ &= \det(\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_-\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_+)\det(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_+\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_-) \end{aligned} \tag{13.47}$$

が成り立つ．これは (無視できる因子 $\det(\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_-\mathrm{i}\,\partial\!\!\!/_+)$ を除くと) 次の Dirac 行列式

$$[\det(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,)]^2 = \det\begin{pmatrix} \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_-\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_+ & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_+\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_- \end{pmatrix} = [\det(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_+\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_-)]^2 \tag{13.48}$$

に等しい．ここに $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/$ は

$$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/ = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_- \\ \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_+ & 0 \end{pmatrix} \tag{13.49}$$

で与えられる．Dirac 行列式はゲージ不変であるから $|\det(\mathrm{i}\hat{D})|$ もゲージ不変である．したがって

$$\exp(-W_r[\mathcal{A}])\exp(-\overline{W_r[\mathcal{A}]}) = \det(\mathrm{i}\hat{D})\det((\mathrm{i}\hat{D})^\dagger) \propto \det(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_+\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/_-)$$

のゲージ不変性から Re $W_r[\mathcal{A}]$ もゲージ不変となる．したがって $W_r[\mathcal{A}]$ の虚数部分，すなわち $\det(\mathrm{i}\hat{D})$ の 位相 のみがゲージ変換のもとで異常な変化をする可能性をもつ．

このアノマリーは前節と同様に変換の Jacobi 行列式を計算して求めることができる．汎関数積分の測度は $\prod_i \mathrm{d}a_i \mathrm{d}\bar{b}_i$ である．無限小ゲージ変換

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A} - \mathcal{D}v, \quad \psi \to \psi + v\psi_+, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi} - \bar{\psi}_- v \tag{13.50}$$

を考えよう．このゲージ変換は正のカイラリティ部分のみを変換する．Jacobi 行列式の部分は

$$\int \mathrm{d}x \ \mathrm{tr}v(x)\sum_n (n|x\rangle\gamma^{m+1}\langle x|n\rangle \tag{13.51}$$

である．ここに $\langle x|n\rangle = \psi_n(x)$, $(n|x\rangle = \chi_n^\dagger(x)$ である（$(n|$ は $|n\rangle$ の Hermite 共役ではないことに注意せよ）．この積分は数学的には定義されておらず，正則化しなければならない．そこで，前節と同様に Gauss 関数で正則化しよう：

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}x \lim_{\substack{M\to\infty\\x\to y}} \mathrm{tr}\ v(x)\sum_n (n|y\rangle\gamma^{m+1}\langle x|\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\hat{D})^2/M^2}|n\rangle\\ &\quad= \int \mathrm{d}x \lim_{\substack{M\to\infty\\x\to y}} \mathrm{tr}\ v(x)\gamma^{m+1}\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\hat{D}_x)^2/M^2}\delta(x-y)\end{aligned} \tag{13.52}$$

ここに，完全性関係

$$\sum_n |n\rangle(n| = \mathbf{1} \tag{13.53}$$

を用いた．(13.41) と (13.52) から

$$\int v^\alpha \mathcal{D}_\mu\left(\frac{\delta}{\delta A_\mu{}^\alpha}W_r[\mathcal{A}]\right) = \int \mathrm{d}x \lim_{\substack{M\to\infty\\x\to y}} \mathrm{tr}[v\gamma^{m+1}\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\hat{D}_x)^2/M^2}\delta(x-y)] \tag{13.54}$$

が導かれる．今の場合 W_r は (13.50) のもとで実際に変化する．上の式の右辺の跡は

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[v\gamma^{m+1}\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\hat{D}_x)^2/M^2}] &= \mathrm{tr}[v(\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-)\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\not{\partial}_- \mathrm{i}\not{\nabla}_+)-(\mathrm{i}\not{\nabla}_- \mathrm{i}\not{\partial}_+)/M^2}]\\ &= \mathrm{tr}[v\mathcal{P}_+\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\not{\partial}\mathrm{i}\not{\nabla})/M^2}] - \mathrm{tr}[v\mathcal{P}_-\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\not{\nabla}\mathrm{i}\not{\partial})/M^2}]\end{aligned} \tag{13.55}$$

とかかれる．(13.55) 式は平面波の基底を用いて求めることができるが，それは単純であるがとても手間がかかる（たとえば Gross and Jackiw (1972) を見よ）．次節ではトポロジカルな視点から非可換アノマリーを導く．$m=4$ のとき，有効作用の異常な変化は

$$\begin{aligned}&W_r[\mathcal{A}-\mathcal{D}v] - W_r[\mathcal{A}]\\ &= \int \mathrm{d}x v^\alpha \mathcal{D}_\mu\langle j^\mu\rangle_\alpha\\ &= \frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{d}x\mathrm{tr}\left\{v^\alpha T_\alpha \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\partial_\kappa\left[\mathcal{A}_\lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\nu + \frac{1}{2}\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\right]\right\}\\ &= \frac{1}{24\pi^2}\int \mathrm{tr}\left\{v\mathrm{d}\left[\mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{A} + \frac{1}{2}\mathcal{A}^3\right]\right\}\end{aligned} \tag{13.56}$$

で与えられる．ゲージ・カレントの異常な発散は

$$\mathcal{D}_\mu\langle j^\mu\rangle_\alpha = \frac{1}{24\pi^2}\mathrm{tr}\left\{T_\alpha\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}\partial_\kappa\left[\mathcal{A}_\lambda\partial_\mu\mathcal{A}_\nu + \frac{1}{2}\mathcal{A}_\lambda\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}_\nu\right]\right\} \tag{13.57}$$

となる．この結果を (13.33) 式と比較せよ．すると二つの差に気づく：$\mathcal{A}^3$ の係数が $\frac{2}{3}$ から $\frac{1}{2}$ に変っており，全体にかかる因子が異なっている．

13.4 Wess-Zumino の無矛盾条件

13.4.1 BRS 作用素と Faddeev-Popov ゴースト

$W_r[\mathcal{A}]$ を，ゲージ群 G の複素表現 $\boldsymbol{r}$ に属する Weyl フェルミオンの有効作用とする．前節では，無限小ゲージ変換 $\delta_v\mathcal{A}=-\mathcal{D}v$ のもとでの $W[\mathcal{A}]$ の変化は

$$\delta_v W[\mathcal{A}] = -\int (\mathcal{D}_\mu v)^\alpha \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_\mu{}^\alpha} W[\mathcal{A}] = \int v^\alpha \mathcal{D}_\mu \langle j^\mu \rangle_\alpha \tag{13.58}$$

で与えられることを示した．

Stra (1984) と Zumino (1985) に従い，BRS 演算子 $\mathcal{S}$ と Faddeev-Popov ゴースト ω を導入しよう．$\Omega^m(G)$ を S^m から G への写像の集合とする．[$\Omega^m(G)$ を，M 上の m-形式の集合 $\Omega^m(M)$ と混同しないように．どちらを意味するかは文脈から明らかであろう．] 通常の外微分 d に加えて，**Becchi-Rouet-Stora (BRS) 演算子**とよばれる $\Omega^m(G)$ 上の外微分 $\mathcal{S}$ を導入しよう．一般に $\mathcal{S}$ は無限次元空間上で定義されているが，$\mathcal{S}$ を S^n のような $\Omega^m(G)$ の有限次元コンパクト部分集合上に制限して考えることもできる．この部分集合の座標を λ^α とすると $\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}\equiv \mathrm{d}\lambda^\alpha \partial/\partial\lambda^\alpha$ とかかれる．d と $\mathcal{S}$ は反交換関係

$$\mathrm{d}^2 = \mathcal{S}^2 = \mathrm{d}\mathcal{S} + \mathcal{S}\mathrm{d} = 0 \tag{13.59}$$

を満たすことを要請する．$\Delta \equiv \mathrm{d} + \mathcal{S}$ を定義すると，Δ は明らかに冪零，すなわち

$$\Delta^2 = \mathrm{d}^2 + \mathrm{d}\mathcal{S} + \mathcal{S}\mathrm{d} + \mathcal{S}^2 = 0 \tag{13.60}$$

を満たす．$g=g(x,\lambda^\alpha)$ の作用のもとで $\mathcal{A}$ は

$$\mathcal{A} \to \boldsymbol{A} \equiv g^{-1}(\mathcal{A}+\mathrm{d})g \tag{13.61}$$

と変換する．$\mathcal{A}$ は λ に依存しないが，$\boldsymbol{A}$ は g を通して λ に依存することに注意しよう．さて **Faddeev-Popov (FP)** ゴーストを

$$\omega \equiv g^{-1}\mathcal{S}g \tag{13.62}$$

で定義する．$\boldsymbol{A}$ と ω に対する $\mathcal{S}$ の作用を求めると

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\boldsymbol{A} &= \mathcal{S}[g^{-1}(\mathcal{A}+\mathrm{d})g] = -g^{-1}\mathcal{S}g\boldsymbol{A} - g^{-1}\mathcal{A}\mathcal{S}g + g^{-1}\mathcal{S}(\mathrm{d}g)\\ &= -\omega\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} - g^{-1}\mathrm{d}g)\omega - g^{-1}\mathrm{d}(\mathcal{S}g)\\ &= -\omega\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\omega - \mathrm{d}\omega \equiv -\mathcal{D}_{\boldsymbol{A}}\omega \end{aligned}\tag{13.63a}$$

$$\mathcal{S}\omega = -g^{-1}\mathcal{S}gg^{-1}\mathcal{S}g = -\omega^2 \tag{13.63b}$$

となる．$\mathcal{S}$ は $\boldsymbol{A}$ と ω に対し冪零であることを確かめるのは易しい．したがって $\boldsymbol{A}$ と ω の任意の多項式についても $\mathcal{S}$ は冪零である：問 13.1 を見よ．$\boldsymbol{A}$ から導かれる場の強さは

$$F \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 = g^{-1}\mathcal{F}g \tag{13.64}$$

である．同様に

$$\mathbb{A} \equiv g^{-1}(\mathcal{A}+\Delta)g = \boldsymbol{A} + g^{-1}\mathcal{S}g = \boldsymbol{A}+\omega \tag{13.65a}$$

$$\mathbb{F} \equiv \Delta\mathbb{A} + \mathbb{A}^2 = g^{-1}\mathcal{F}g = \boldsymbol{F} \tag{13.65b}$$

を定義しよう．ここに (13.65b) は $\mathcal{F} = \mathrm{d}\mathcal{A}+\mathcal{A}^2 = \Delta\mathcal{A}+\mathcal{A}^2$ から導かれる ($\mathcal{S}\mathcal{A}=0$ に注意せよ)．定理 10.1 から $\mathbb{A}$ は主束における Ehresmann 接続で $\mathbb{F}$ はその曲率 2 形式であることがわかる．

非可換アノマリーの存在は $W[\boldsymbol{A}]$ に BRS 演算子 $\mathcal{S}$ が作用したとき，それがゼロとならないことを意味する (ω は大まかに言って v に対応する；(13.39), (13.63a) を見よ)；

$$\mathcal{S}W[\boldsymbol{A}] = G[\omega, \boldsymbol{A}] \tag{13.66}$$

$W[\boldsymbol{A}]$ は ω に独立であるから $\mathcal{S}$ は $\boldsymbol{A}$ を通してのみ作用する．さて，非可換アノマリーに対する Wess-Zumino の無矛盾条件を書き下す前に BRS 演算子と FP ゴーストの物理的意味を考えよう．

問 13.1 (13.63) 式を用いて $\boldsymbol{A}$ と ω に対する $\mathcal{S}$ の作用は冪零であること，すなわち

$$\mathcal{S}^2\boldsymbol{A} = 0 \qquad \mathcal{S}^2\omega = 0 \tag{13.67}$$

を確かめよ．

13.4.2 BRS 作用素，FP ゴースト，モジュライ空間

$\mathcal{S}$ と ω の物理的な意味を見出すには，ゲージ場のトポロジーを調べることが必要となる (Atiyah and Jones (1978), Singer (1985), Sumitani (1985))．S^m 上のすべてのゲージ・ポテンシャルの配位からなる空間を $\mathfrak{A}$ とする．以下，話を具体的にするために $m=4$ とおくが，任意の m への一般化は自明である．$\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ を任意のゲージ・ポテンシャルの配位とすると $t\mathcal{A}_1+(1-t)\mathcal{A}_2$ $(0 \le t \le 1)$ も S^4 上のゲージ・ポテンシャルなので，$\mathfrak{A}$ のトポロジーは自明である．しかしながら，$\mathfrak{A}$ はゲージ理論の 物理的な 配位空間を記述するのではないことに注意しよう．すなわち，G-ゲージ変換で結ばれている場の配位は同一視しなければならない．S^4 上のすべてのゲージ変換の空間を $\mathfrak{G}$ としよう (以前の記法では $\mathfrak{G} = \Omega^4(G)$ となる)．すると，物理的な配位空間は $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ としなければならない．これをゲージ理論の**モジュライ空間**とよぶ．§10.5 で S^4 上のゲージ場の配位は S^4 の赤道 S^3 上の遷移関数 $g : S^3 \to G$ により分類されることを示した．今の場合 $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ は赤道上の遷移関数 $S^3 \to G$ によって分類されるので

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{G} \simeq \Omega^3(G) \tag{13.68}$$

が成り立つ．したがって $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ の各連結成分はインスタントン数 k によってラベル付けされる．この成分を $\Omega^4_k(G)$ と表す．

空間 $\mathfrak{A}$ は自然な射影 $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ をもち，それによってファイバーを $\mathfrak{G}$ とするファイバー束となる (図 13.1 を見よ)．

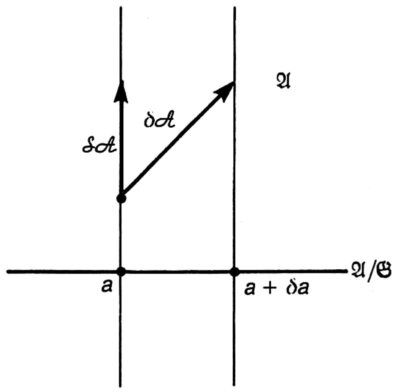


図 **13.1.** BRS 変換 $\mathcal{S}$ は，変分 δ をファイバーに沿って制限したものである．

$a \in \mathfrak{A}$ を，同値類 $[a] \in \mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ の代表元とし，

$$\mathcal{A}(x) = g^{-1}(x)(a(x) + \mathrm{d})g(x) \tag{13.69}$$

を $[a]$ における $\mathfrak{A}$ の元としよう．$\mathfrak{A}$ における外微分演算子を δ で表す．これは汎関数変分であり，通常の微分 d と混同してはならない；Leinaas and Olaussen (1982) を参照せよ．δ を (13.69) 式に作用させると

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A} &= -g^{-1}\delta g\mathcal{A} + g^{-1}\delta a g - g^{-1}a\delta g - g^{-1}\mathrm{d}(\delta g)\\ &= g^{-1}\delta a g - \mathrm{d}(g^{-1}\delta g) - g^{-1}\delta g\mathcal{A} - \mathcal{A}g^{-1}\delta g\\ &= g^{-1}\delta a g - \mathcal{D}_{\mathcal{A}}(g^{-1}\delta g)\end{aligned} \tag{13.70}$$

が得られる．ここに $\mathcal{D}_{\mathcal{A}} = \mathrm{d} + [\mathcal{A},\ \ ]$ と定義した．(13.70) の最初の項は $\mathcal{A}$ の $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ に沿う微分を表し，第 2 項はファイバーに沿う微分を表す (図 13.1 を見よ)．BRS 変換 $\mathcal{S}$ は，変分 δ をファイバーに沿って制限したものである；

$$\mathcal{S}\mathcal{A} \equiv \delta\mathcal{A}|_{\text{fibre}} = -\mathcal{D}_{\mathcal{A}}\omega \tag{13.71a}$$

ここに FP ゴースト ω は $g^{-1}\mathcal{S}g \equiv g^{-1}\,\delta g|_{\text{fibre}}$ である．また

$$\mathcal{S}\omega = \delta\omega|_{\text{fibre}} = -g^{-1}\mathcal{S}gg^{-1}\mathcal{S}g = -\omega^2 \tag{13.71b}$$

も示されるが，これは (13.63) を再現する．

13.4.3 Wess-Zumino 条件

問 13.1 で示したように $\mathcal{S}$ は $\mathcal{A}$ と ω の任意の関数 f に対し冪零である；

$$\mathcal{S}^2 f(\omega, \boldsymbol{A}) = 0 \tag{13.72}$$

この性質は $\mathcal{S}$ を外微分演算子として解釈する上で欠くことができない．特に

$$\mathcal{S}G[\omega, \boldsymbol{A}] = \mathcal{S}^2 W[A] = 0 \tag{13.73}$$

が成り立つはずである．この条件は **Wess-Zumino の無矛盾条件**とよばれ，非可換アノマリーを決める上で用いることができる (Wess and Zumino (1971)，Stora (1984)，Zumino *et al* (1984))．アノマリー G が数学的に矛盾なく定義できれば G は WZ 条件を満たさなければならない．この条件は非常に強力で，ひとたび $G[\omega, \boldsymbol{A}]$ の最初の項が与えられたならば，アノマリーは完全に決定される．

13.4.4 降下方程式と WZ 条件の解

Stora (1984) と Zumino (1985) は WZ 条件の解を以下のように構成した．$(2l+2)$-次元空間における可換アノマリーは

$$\mathrm{ch}_{l+1}(\boldsymbol{F}) = \frac{1}{(l+1)!}\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{F}}{2\pi}\right)^{l+1} \tag{13.74}$$

で与えられる．以前と同じく $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A} = g^{-1}(\mathcal{A}+\mathrm{d})g$ である．$\mathrm{ch}_{l+1}(\boldsymbol{F})$ は $(2l+2)$ 形式で，恒等的にゼロであるので (13.74) 式は形式的なものであることに注意されたい．$Q_{2l+1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F})$ を $\mathrm{ch}_{l+1}(\boldsymbol{F})$ を与える Chern-Simons 形式としよう；

$$\mathrm{ch}_{l+1}(\boldsymbol{F}) = \mathrm{d}Q_{2l+1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) \tag{13.75}$$

三つ組み $(\Delta, \mathbb{A}, \mathbb{F})$ の代数的構造は $(\mathrm{d}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F})$ と完全に等しいので，前者に対し

$$\mathrm{ch}_{l+1}(\mathbb{F}) = \Delta Q_{2l+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F}) = \Delta Q_{2l+1}(\boldsymbol{A}+\omega, \boldsymbol{F}) \tag{13.76}$$

が成り立たなくてはならない．ここに $\mathbb{A} = \boldsymbol{A}+\omega, \mathbb{F} = \boldsymbol{F}$ を用いた．$Q_{2l+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F}) = Q_{2l+1}(\boldsymbol{A}+\omega, \boldsymbol{F})$ を ω の冪で展開すると

$$\begin{aligned} Q_{2l+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F}) \;\; = \;\; & Q^0_{2l+1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) + Q^1_{2l}(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) + Q^2_{2l-1}(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) \\ & + \ldots + Q^{2l+1}_0(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) \end{aligned} \tag{13.77}$$

が得られる．ここに Q^s_r は ω の s-次の項で $r+s = 2l+1$ である．

さて $\mathbb{F} = \boldsymbol{F} = g^{-1}\mathcal{F}g$ より，$\mathrm{ch}_{l+1}(\mathbb{F}) = \mathrm{ch}_{l+1}(\boldsymbol{F})$ となることに注意しよう．Chern-Simons 形式を用いると，これは

$$\Delta Q_{2l+1}(\mathbb{A}, \mathbb{F}) = \mathrm{d}Q_{2l+1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) \tag{13.78}$$

と表される．(13.77) 式を (13.78) 式に代入すると

$$\begin{aligned} &(\mathrm{d}+\mathcal{S})[Q^0_{2l+1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) + Q^1_{2l}(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) \\ &\qquad + \ldots + Q^{2l+1}_0(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F})] = \mathrm{d}Q^0_{2l+1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) \end{aligned} \tag{13.79}$$

を得る．ω に関し，同じ次数の項を集めると **'降下方程式'**

$$\mathcal{S}Q^0_{2l+1}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) + \mathrm{d}Q^1_{2l}(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) = 0 \tag{13.80a}$$

$$\mathcal{S}Q^1_{2l}(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) + \mathrm{d}Q^2_{2l-1}(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) = 0 \tag{13.80b}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{S}Q_1^{2l}(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) + \mathrm{d}Q_0^{2l+1}(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) = 0 \tag{13.80c}$$

$$\mathcal{S}Q_0^{2l+1}(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) = 0 \tag{13.80d}$$

が得られる．[$\mathcal{S}$ は ω の次数を 1 だけ増すことに注意せよ ((13.63) 式を見よ)．] $2l$-形式 $Q_{2l}^1(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F})$ に注目しよう．

$$G[\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}] \equiv \int_M Q_{2l}^1(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) \tag{13.81}$$

とおくと $G[\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}]$ は WZ 条件を満足する；

$$\begin{aligned}\mathcal{S}G[\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}] &= \int_M \mathcal{S}Q_{2l}^1(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) = -\int_M \mathrm{d}Q_{2l-1}^2(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}) \\ &= -\int_{\partial M} Q_{2l-1}^2(\omega, A, F) = 0\end{aligned}$$

ただし M は境界をもたないと仮定し，また (13.80b) を用いた．したがって，ひとたび $Q_{2l}^1(\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F})$ が求められると，アノマリー $G[\omega, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}]$ は直ちに得られる．

命題 13.1 上に定義された Q_{2l}^1 は

$$Q_{2l}^1(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^{l+1} \frac{1}{(l-1)!} \int_0^1 \delta t(1-t)\mathrm{str}[\omega \mathrm{d}(\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{l-1})] \tag{13.82}$$

で与えられる．

[注意：表記を簡単にするために，証明の途中では一時的に規格化因子 $(\mathrm{i}/2\pi)^{l+1}$ を落とす．この因子は証明の最後に復活させる．]

証明：(11.105) 式からスタートしよう；

$$Q_{2l+1}(\mathcal{A}+\omega, \mathcal{F}) = \frac{1}{l!}\int \delta t \mathrm{tr}[(\mathcal{A}+\omega)\hat{\mathcal{F}}_t^l]$$

ここに

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_t &\equiv t\mathcal{F} + (t^2 - t)(\mathcal{A}+\omega)^2 \\ &= \mathcal{F}_t + (t^2-t)\{\mathcal{A}, \omega\} + (t^2-t)\omega^2 \\ \mathcal{F}_t &\equiv \mathrm{d}(t\mathcal{A}) + (t\mathcal{A})^2\end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{F}}_t$ を Q_{2l+1} に代入し ω の 1 次の項を集めると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{l!}\int_0^1 \delta t\ \mathrm{tr}[\omega\mathcal{F}_t^l + (t^2-t)(\mathcal{A}[\mathcal{A},\omega]\mathcal{F}_t^{l-1} + \mathcal{A}\mathcal{F}_t[\mathcal{A},\omega]\mathcal{F}_t^{l-2} \\ &\qquad + \ldots + \mathcal{A}\mathcal{F}_t^{l-1}[\mathcal{A},\omega])] \\ &= \frac{1}{l!}\int \delta t\ \mathrm{str}[\omega\mathcal{F}_t^l + (t^2-t)\mathcal{A}(\mathcal{F}_t^{l-1}[\mathcal{A},\omega]] \\ &\qquad + \mathcal{F}_t^{l-2}[\mathcal{A},\omega]\mathcal{F}_t + \ldots)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{l!}\int \delta t\ \mathrm{str}[\omega\mathcal{F}_t^l + (t^2-t)l\mathcal{A}[\mathcal{A},v]\mathcal{F}_t^{l-1}] \\
&= \frac{1}{l!}\int \delta t\ \mathrm{str}[\omega\mathcal{F}_t^l + l(t^2-t)([\mathcal{A},\mathcal{A}]\omega\mathcal{F}_t^{l-1} + \mathcal{A}\omega[\mathcal{A},\mathcal{F}_t^{l-1}])] \\
&= \frac{1}{l!}\int \delta t\ \mathrm{str}[\omega\{\mathcal{F}_t^l + l(t-1)(t[\mathcal{A},\mathcal{A}]\mathcal{F}_t^{l-1} - \mathcal{A}[\mathcal{A}_t,\mathcal{F}_t^{l-1}])\}]
\end{aligned}
$$

ここに str は (11.8) で定義された対称化された跡である．ここで

$$\mathcal{D}_t\mathcal{F}_t^{l-1} \equiv \mathrm{d}\mathcal{F}_t^{l-1} + [\mathcal{A}_t,\mathcal{F}_t^{l-1}] = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{F}_t}{\partial t} = \mathrm{d}\mathcal{A} + t[\mathcal{A},\mathcal{A}]$$

を用いて上の式の最後の行を変形すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{l!}\int \delta t\ \mathrm{str}\left[\omega\left\{\mathcal{F}_t^l + l(t-1)\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}_t}{\partial t} - \mathrm{d}\mathcal{A}\right)\mathcal{F}_t^{l-1} + \mathcal{A}\mathrm{d}\mathcal{F}_t^{l-1}\right]\right\}\right] \\
&\quad = \frac{1}{l!}\int \delta t\ \mathrm{str}\left[\omega\left(\mathcal{F}_t^l + l(1-t)\mathrm{d}(\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{l-1}) + (t-1)\frac{\partial\mathcal{F}_t^l}{\partial t}\right)\right]
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで，部分積分を行うと

$$Q_{2l}^1(\omega,\mathcal{A},\mathcal{F}) = \frac{1}{(l-1)!}\int \delta t(1-t)\mathrm{str}[\omega\mathrm{d}(\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{l-1})].$$

が得られる．最後に規格化因子を復活させて

$$Q_{2l}^1(\omega,\mathcal{A},\mathcal{F}) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^{l+1}\frac{1}{(l-1)!}\int_0^1 \delta t(1-t)\mathrm{str}[\omega\mathrm{d}(\mathcal{A}\mathcal{F}_t^{l-1})]$$

が示された．∎

とくに $m = 2l = 2$ と $m = 4$ のときは

$$Q_2^1(\omega,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^2 \mathrm{tr}(\omega\mathrm{d}\boldsymbol{A}) \tag{13.83a}$$

と

$$Q_4^1(\omega,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}) = \frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^3 \mathrm{str}\left(\omega\mathrm{d}\left(\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^3\right)\right) \tag{13.83b}$$

が得られる．これらの結果は直接の計算でも示すことができる．規格化因子を除いて (13.83*b*) は 4 次元空間における非可換アノマリーを表す ((13.56) を見よ)．

Sumitani (1984) は，非可換アノマリーに対するこれらのアプローチは一般性をもたず，以下の問題があることを指摘した：

(1) WZ 条件 (13.73) はアノマリーの規格化因子を決定しないし，解の一意性は決して自明ではない．

(2) なぜ $(m+2)$-次元空間における <u>可換</u> アノマリーから出発すべきなのか明らかではない．

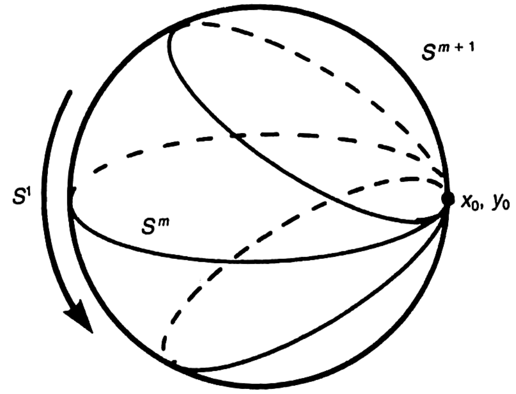


図 **13.2.** スマッシュ積 $S^1 \times S^m \simeq S^{m+1}$.

これらの問いに答えるためには，指数定理をさらに精密化した「ファミリー指数定理」を用いなければならない；Atiyah-Singer (1984), Singer (1985), Sumitani (1984, 1985) を見よ．次の節では，Alvarez-Gaumé and Ginsparg (1984) にそって，この問題に対する物理学者のアプローチを概観する．

13.5 可換アノマリーと非可換アノマリー

m-次元 Euclid 空間 $(m = 2l)$ を 1 点コンパクト化した $S^m = \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ を考える．G を SU(N) のような単連結な半単純ゲージ群とする ($\pi_1(\mathrm{SU}(N)) = 0$ に注意)．1-パラメタのゲージ変換の族 $g(\theta, x)$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ を考えよう．g は条件

$$g(0, x) = g(2\pi, x) = e \tag{13.84}$$

を満たすものとする．一般性を失うことなしに g はある点 $x_0 \in S^m$ において $g(\theta, x_0) = e$ と規格化されるとしてもよい．写像 $g : S^1 \times S^m$ はホモトピー類 $\pi_{m+1}(G)$ によって分類される．これを見るために，位相空間 X, Y に対し，スマッシュ積 $X \wedge Y$ を定義しよう．$X \wedge Y$ は直積 $X \times Y$ において $X \vee Y \equiv (\{x_0\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$ を 1 点に縮めたものである．図 13.2 から $S^1 \wedge S^m = S^m \wedge S^1 = S^{m+1}$ が直ちにわかる．[読者は具体的に $S^1 \wedge S^1 = S^2$ の絵を描いて確かめられたい．]

これを繰り返すと

$$S^m \wedge S^n = S^{m+n} \tag{13.85}$$

が示される．我々が考えている問題では，条件 (13.84) により直積 $S^1 \times S^m$ はトポロジカルに $S^1 \wedge S^m = S^{m+1}$ となる．したがって g は S^{m+1} から G への写像とみなされ $\pi_{m+1}(G)$ で分類される．ここで $\mathfrak{G} = \Omega^m(G)$ 上の 1-パラメタの族を考えているので $\pi_{m+1}(G) = \pi_1(\mathfrak{G})$ が得られる．実際には $G = \mathrm{SU}(N)$ ととるので

$$\pi_{m+1}(\mathrm{SU}(N)) = \mathbb{Z} \quad N \ge \frac{1}{2}m + 1 \tag{13.86}$$

となる．さて，ゼロ・インスタントンのセクター $\Omega_0^m(G)$ に「基準となる」ゲージ場 $\mathcal{A}$ をとる．一般性を失うことなしに $\mathcal{A}$ を背景とする Dirac 作用素 (13.49) は，ゼロ・モードをもたないと仮定する．ゲージ場の 1-パラメタ族

$$\mathcal{A}^{g(\theta)}(x) \equiv g^{-1}(\theta, x)(\mathcal{A}(x) + \mathrm{d})g(\theta, x) \tag{13.87}$$

を考えよう．ここに θ は S^1 を表すパラメタである．§13.3 で見たように $|\det \mathrm{i}\hat{D}|$ はゲージ不変で ((13.47) を見よ) $\det \mathrm{i}\hat{D}$ の位相のみがゲージ変換のもとで異常な変化をする．これは特に $\det \mathrm{i}\hat{D}$ が，いかなる θ に対してもゼロとはならないことを意味する．ここで

$$\exp\{-W_r[\mathcal{A}^{g(\theta)}]\} = \det \mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^{g(\theta)}) = [\det \mathrm{i} \nabla\!\!\!/ \, (\mathcal{A})]^{1/2} \exp[\mathrm{i}w(\mathcal{A}, \theta)] \tag{13.88}$$

と書こう．ここに $\mathrm{i}\nabla\!\!\!/$ は Dirac 作用素 (13.87) で $\mathrm{i}w(\mathcal{A}, \theta)$ はゲージ変換 (13.87) に付随する異常な位相である．次に，$\mathcal{A} = 0$ と $\mathcal{A}^{g(\theta)}$ を内挿する 2-パラメタのゲージ場の族

$$\mathcal{A}^{t,\theta} \equiv t\mathcal{A}^{g(\theta)} \quad (0 \le t \le 1) \tag{13.89}$$

を考えよう．(t, θ) で指定されるパラメタの空間は (t, θ) を極座標とする 2 次元の単位円板 D^2 とみなすことができる．円板の境界 $\partial D^2 = S^1$ では $\det \mathrm{i}\hat{D}$ の絶対値はゼロではない定数である．このとき，位相 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w(\mathcal{A},\theta)}$ は写像 $S^1(=\partial D^2) \to S^1(=\mathrm{U}(1))$ を定義する；図 13.2 を見よ．円板の端を回るにつれ，位相は単位円の上を運動する．この写像の巻き数は，整数

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial w(\mathcal{A}, \theta)}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta \tag{13.90}$$

で与えられる．以下で $\mathcal{N}$ は $(m+2)$-次元の可換アノマリーから導かれることを示す．

問 13.2

$$W[\mathcal{A}^{g(2\pi)}] - W[\mathcal{A}^{g(0)}] = -2\pi\mathrm{i}\mathcal{N} \tag{13.91}$$

を示せ．条件 $g(2\pi) = g(0)$ より (13.91) は Berry の位相とみなすことができる．

13.5.1　m 次元 vs $m+2$ 次元

基準となるゲージ場 $\mathcal{A}$ を背景とする Dirac 作用素 $\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A})$ は，ゼロ・モードをもたないことを思い出そう．$|\det \mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^{g(\theta)})| = |\det \mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A})| \neq 0$ であるから，演算子 $\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^{g(\theta)})$ もゼロ・モードはもたない．一般に $\mathcal{A}^{t,\theta}$ は $\mathcal{A}$ からゲージ変換では得られないので，もちろん $\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^{t,\theta})$ はゼロ・モードをもっていてもよい．$\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^{t,\theta})$ がゼロ・モードをもつ点を $p_i = (t_i, \theta_i)$ としよう．これらの点は，すべて孤立点であるとする．$\det \mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^{t,\theta})$ は固有値の正則化された積であるから，p_i で行列式はゼロとなる．$\det \mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^{t,\theta})$ の位相は，これらの点の周りでのみホモトピー的に自明でない．さらに，p_i における巻き数は p_i でゼロとなる固有値によって決定される．例えば $\lambda_n(t, \theta)$ が p_i でゼロになるとすると，その固有値は

$$\lambda_n(t, \theta) = f(t, \theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}w_i(t,\theta)} \tag{13.92}$$

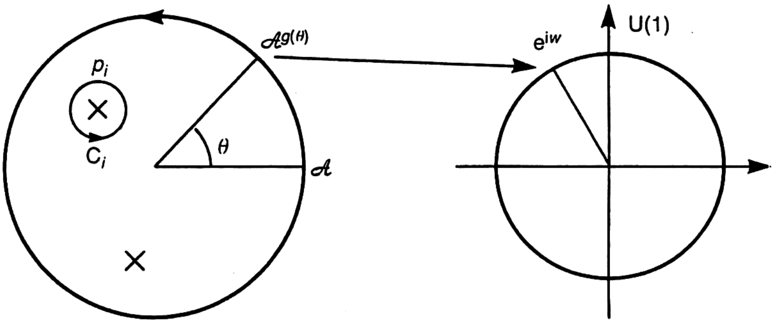


図 13.3. 有効作用 $W[\mathcal{A}^{g(\theta)}]$ の位相は，写像 $S^1 \to \mathrm{U}(1)$ を $\theta \mapsto e^{\mathrm{i}w(\mathcal{A},\theta)}$ により定義する．円板の上には $\det \mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^{t,\theta})$ のがゼロとなる点 $\{p_i\}$ が存在する．写像 $S^1 \to \mathrm{U}(1)$ の巻き数 $\mathcal{N}$ は，小ループ C_i の周りの巻き数の和で与えられる．

と振舞う．ここに $f(t_i,\theta_i)=0$ である．p_i を囲む小さな閉曲線を C_i とすると，p_i における巻き数は

$$m_i = \frac{1}{2\pi}\int_{C_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}w_i(t,\theta)\mathrm{d}s \tag{13.93}$$

で与えられる (図 13.3 を見よ)．ループ $S^1=\partial D^2$ を p_i を囲む小円 C_i の和に連続的に変形することにより，全巻き数は

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1}\mathrm{d}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}w(\mathcal{A},\theta) = \sum m_i \tag{13.94}$$

と表される．

ここで，巻き数 $\mathcal{N}$ は $(m+2)$-次元空間 $(m=2l)$ における指数定理と関係していることを示す．すなわち，ind i $\nabla\!\!\!/_{m+2}$ を以下に定義する $S^2\times S^m$ 上の Dirac 作用素とすると $\mathcal{N}=$ ind i $\nabla\!\!\!/_{m+2}$ が成り立つ．$D^2\times S^m$ の座標を (t,θ,x) で表し，その上のゲージ理論を考えよう．境界項を避けるために，もう一つの $D^2\times S^m$ (座標を (s,θ,x) とする) を用意し，それを先の $D^2\times S^m$ と張り合わせて，境界のない $S^2\times S^m$ を構成する (図 13.4 を見よ)．

(t,θ) で記述される部分を北半球 U_N，(s,θ) で記述される部分を南半球 U_S とよぶ．S^2 の赤道 S^1 上では $t=s=1$ となる．局所ゲージ場として，以下のゲージ・ポテンシャルを選ぶ；

$$\mathcal{A}_\mathrm{N}(t,\theta,x) = \mathcal{A}^{t,\theta}+g^{-1}\mathrm{d}_\theta g \qquad (t,\theta)\in U_\mathrm{N} \tag{13.95a}$$

$$\mathcal{A}_\mathrm{S}(s,\theta,x) = \mathcal{A} \qquad (s,\theta)\in U_\mathrm{S} \tag{13.95b}$$

ここに $\mathcal{A}$ は，以前導入した基準のゲージ場である．$\mathcal{A}_\mathrm{N}=\mathcal{A}_{\mathrm{N}\mu}dx^\mu$ と $\mathcal{A}_\mathrm{S}=\mathcal{A}_{\mathrm{S}\mu}dx^\mu$ を，$S^2\times S^m$ の上の G 束上で大域的に定義された接続に拡張するために，次の $(m+2)$-次元ゲージ・ポテンシャル

$$\mathbb{A}_\mathrm{N}(t,\theta,x) = (\mathcal{A}_t,\mathcal{A}_\theta,\mathcal{A}_\mu) = (0,0,\mathcal{A}_\mathrm{N}) \tag{13.96a}$$

$$\mathbb{A}_\mathrm{S}(s,\theta,x) = (\mathcal{A}_s,\mathcal{A}_\theta,\mathcal{A}_\mu) = (0,0,\mathcal{A}_\mathrm{S}) \tag{13.96b}$$

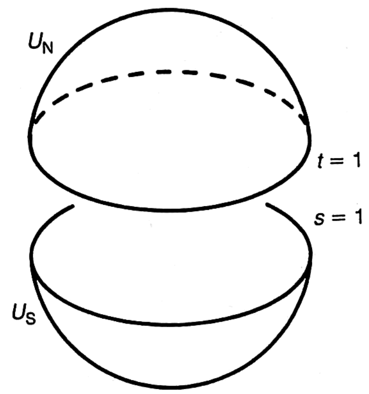


図 13.4. 座標 (t,θ) をもつ $U_{\rm N}$ と，座標 (s,θ) をもつ $U_{\rm S}$ は $t=s=1$ で張り合わされ，球面 S^2 となる．これはモジュライ空間 $\mathfrak{A}/\mathfrak{G}$ の中の球面である．

を定義する．$\Delta = {\rm d}+{\rm d}_\theta+{\rm d}_t$ とすると，赤道上では $\mathbb{A}_{\rm N}=g^{-1}(\mathbb{A}_{\rm S}+\Delta)g$ となる (${\rm d}_t g=0$ に注意せよ)．したがって，接続 $\mathbb{A}=\{\mathbb{A}_{\rm N},\mathbb{A}_{\rm S}\}$ は $S^2\times S^m$ 上で大域的に定義されている．$\mathbb{A}$ と結合する Dirac 作用素 ${\rm i}\,\nabla\!\!\!\!/\,_{m+2}$ を考えよう．${\rm i}\,\nabla\!\!\!\!/\,_{m+2}$ に対する指数定理は

$$\text{ind}\ {\rm i}\,\nabla\!\!\!\!/\,_{m+2} = \mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_- = \int_{S^2\times S^m} {\rm ch}_{l+1}(\mathbb{F}) \tag{13.97}$$

で与えられる．ここに $\mathbb{F}=\Delta\mathbb{A}+\mathbb{A}^2$ で $\mathcal{N}_+$ $(\mathcal{N}_-)$ は ${\rm i}\,\nabla\!\!\!\!/\,_{m+2}$ の $+$ $(-)$ カイラリティのゼロ・モードの個数である (カイラリティは $(m+2)$-次元空間で定義されている)．

Alvarez-Gaumé and Ginsparg (1984) は断熱的摂動計算により，p_i における巻き数 m_i は ± 1 となることを示した．さらに Dirac 作用素 ${\rm i}\,\nabla\!\!\!\!/\,_{m+2}$ は $p_i=(t_i,\theta_i)$ において $(m+2)$-次元のカイラリティが $\chi=m_i=\pm 1$ であるゼロ・モードをもつ．すると，全巻き数 $\mathcal{N}=\sum m_i$ は，指数 $\mathcal{N}_+-\mathcal{N}_-$ で与えられる．したがって

$$\text{ind}\ {\rm i}\,\nabla\!\!\!\!/\,_{m+2} = \int_{S^2\times S^m} {\rm ch}_{l+1}(\mathbb{F}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} {\rm d}\theta \frac{\partial w(\mathcal{A},\theta)}{\partial\theta} \tag{13.98}$$

が得られた．

(13.98) 式から，規格化因子を含めた非可換アノマリーが容易に見出される．${\rm ch}_{l+1}(\mathbb{F}) = {\rm d}Q_{m+1}(\mathbb{A},\mathbb{F})$ より

$$\begin{aligned}\int_{S^2\times S^m} {\rm ch}_{l+1}(\mathbb{F}) &= \int_{D^2\times S^m} {\rm ch}_{l+1}(\mathbb{F}_{\rm N}) + \int_{D^2\times S^m} {\rm ch}_{l+1}(\mathbb{F}_{\rm S}) \\ &= \int_{S^1\times S^m} [Q_{m+1}(\mathbb{A}_{\rm N},\mathbb{F}_{\rm N})|_{t=1} - Q_{m+1}(\mathbb{A}_{\rm S},\mathbb{F}_{\rm S})|_{s=1}] \end{aligned} \tag{13.99}$$

が得られる．(11.118) から

$$\begin{aligned}&Q_{m+1}(\mathbb{A}_{\rm N},\mathbb{F}_{\rm N})|_{t=1} - Q_{m+1}(\mathbb{A}_{\rm S},\mathbb{F}_{\rm S})|_{s=1} \\ &= Q_{m+1}(g^{-1}\Delta g, 0) + \Delta\alpha_m \\ &= (-1)^l\left(\frac{\rm i}{2\pi}\right)^{l+1}\frac{l!}{(m+1)!}{\rm tr}(g^{-1}\Delta g)^{m+1} + \Delta\alpha_m \end{aligned} \tag{13.100}$$

が得られる．したがって，指数定理は

$$\text{ind i} \nabla\!\!\!\!/\,_{m+2} = (-1)^l \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\right)^{l+1} \frac{l!}{(m+1)!} \int_{S^1 \times S^m} \mathrm{tr}(g^{-1}\Delta g)^{m+1} \tag{13.101}$$

で与えられる．定理 10.7 によると $\int_{S^3} \mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g)^3$ は，写像 $g : S^3 \to \mathrm{SU}(2)$ の巻き数を与える．同様に (13.101) は，写像 $g : S^{m+1} \to G$ の巻き数を与え $\pi_{m+1}(G)$ によって類別される ($S^1 \wedge S^m = S^{m+1}$ に注意)．

最後に，非可換アノマリーは Q^1_m と一致することを示そう．まず

$$\int_{S^1 \times S^m} Q_{m+1}(\mathbb{A}_\mathrm{S}, \mathbb{F}_\mathrm{S}) = 0$$

に注意しよう．なぜならば，被積分関数は $\mathrm{d}\theta$ に独立で，$S^1 \times S^m$ の体積要素ではありえないからである．すると

$$\text{ind i} \nabla\!\!\!\!/\,_{m+2} = \int_{S^1 \times S^m} Q_{m+1}(\mathcal{A}^{g(\theta)} + \omega, \mathcal{F}^{g(\theta)}) \tag{13.102}$$

が成り立つ．ここに $\omega = g^{-1}\mathrm{d}_\theta g$，$\mathcal{F}^{g(\theta)} = \mathrm{d}\mathcal{A}^{g(\theta)} + (\mathcal{A}^{g(\theta)})^2 = g(\theta)^{-1}\mathcal{F}g(\theta)$ である．(13.102) の被積分関数を ω で展開すると $\mathrm{d}\theta$ に関し 線形 の項のみが積分に寄与する．この項 $Q^1_m(\omega, \mathcal{A}^{g(\theta)}, \mathcal{F}^{g(\theta)})$ は $\mathrm{d}\theta \wedge (S^m$の体積要素$)$ に比例し，したがって $S^1 \times S^m$ の体積要素である．これから

$$\begin{aligned} \delta_\omega W[\mathcal{A}] &= \int_{S^m} \mathrm{tr}\omega \mathcal{D}_\mu \frac{\delta W[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu} \\ &= \mathrm{id}_\theta w(\theta, \mathcal{A}) = 2\pi\mathrm{i} \int_{S^m} Q^1_m(\omega, \mathcal{A}^{g(\theta)}, \mathcal{F}^{g(\theta)}) \end{aligned} \tag{13.103}$$

となる． q^1_M の具体的な形は (13.82) 式に与えられている．$m = 4$ のとき，これは

$$\begin{aligned} \int \mathrm{tr}\omega\ \mathcal{D}_\mu \frac{\delta W[\mathcal{A}]}{\delta \mathcal{A}_\mu} &= 2\pi\mathrm{i} \int_{S^4} Q^1_4(\omega, \mathcal{A}^{g(\theta)}, \mathcal{F}^{g(\theta)}) \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^m} \mathrm{tr}\omega\ \mathrm{d} \left[\mathcal{A}^{g(\theta)}\mathrm{d}\mathcal{A}^{g(\theta)} + \frac{1}{2}(\mathcal{A}^{g(\theta)})^3\right] \end{aligned} \tag{13.104}$$

となる．$\theta = 0$ $(g = e)$ とおくと，(13.56) の異常発散の式

$$\mathcal{D}_\mu \langle j^\mu \rangle_\alpha = \frac{1}{24\pi^2} \mathrm{tr} T_\alpha \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \partial_\kappa \left[\mathcal{A}_\lambda \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + \frac{1}{2}\mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu\right] \tag{13.105}$$

が再現される．ここで述べた方法により，WZ 条件は正しい答えを与えることが保証される．さらに WZ 条件だけでは決定することができなかった規格化因子までを含めた異常発散の式を再現する．

13.6　奇数次元空間におけるパリティ・アノマリー

これまでは，偶数次元空間におけるアノマリーを解析してきた．その理由の一つは SO(2l+1) は実，または擬実スピノル表現はもつが，複素 表現はもたず，したがってゲージ・アノ

マリーは存在しないと思われるからである．しかし，奇数次元空間におけるゲージ理論は'パリティ・アノマリーとよばれる別の種類のアノマリーをもつことを以下に示す．このアノマリーが存在すると，古典作用がもつパリティ対称性が，量子化の過程で破れてしまう．Alvarez-Gaumé 達 (1985) は $(2l+1)$-次元空間におけるパリティ・アノマリーが $(2l+2)$-次元空間における可換アノマリーと関係付けられることを示した．

13.6.1 パリティ・アノマリー

M を $(2l+1)$-次元 Riemann 多様体とする．ここで，ひとつの次元だけを特別扱いする；M は $\mathcal{M}$ を境界がない $2l$-次元コンパクト多様体として，$\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ か $S^1\times\mathcal{M}$ という形をしているとしよう．$\mathbb{R}$ や S^1 の座標を t で表し $\mathcal{M}$ の座標を x で表す．添字 0 は t-空間の成分を表し，μ は x-空間の成分を表す．例えば，γ 行列の成分は $\{\gamma^0,\gamma^\mu\ (1\le\mu\le 2l)\}$ と表される．

'パリティ' 変換 P を

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0(t,x)&\to\mathcal{A}_0^{\mathrm{P}}=-\mathcal{A}_0(-t,x)\\ \mathcal{A}_\mu(t,x)&\to\mathcal{A}_\mu^{\mathrm{P}}=\mathcal{A}_\mu(-t,x)\\ \psi(t,x)&\to\psi^{\mathrm{P}}=\mathrm{i}\gamma_0\psi(-t,x)\\ \bar\psi(t,x)&\to\bar\psi^{\mathrm{P}}=\mathrm{i}\bar\psi(-t,x)\gamma_0\end{aligned}$$

で定義する．古典作用はこのパリティ変換のもとで不変である；

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}t\mathrm{d}x\bar\psi\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,\psi\to-&\int\mathrm{d}t\mathrm{d}x\bar\psi(-t,x)\gamma^0\mathrm{i}[\gamma^0(\partial_0-\mathcal{A}_0(-t,x))\\&+\gamma^\mu(\partial_\mu+\mathcal{A}_\mu(-t,x))]\gamma^0\psi(-t,x)\\=&\int\mathrm{d}t\mathrm{d}x\bar\psi(t,x)\mathrm{i}[\gamma^0(\partial_0+\mathcal{A}_0(t,x))\\&+\gamma^\mu(\partial_\mu+\mathcal{A}_\mu(t,x))]\psi(t,x)\end{aligned}$$

ただし，最後の段で $t\to -t$ とおいた．さて，有効作用がこの変換に対しどのように変化するか調べよう．有効作用は $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/$ の固有値の正則化された積として与えられる．**Pauli-Villars** 正則化を用いて，この積を正則化しよう．すなわち

$$\mathcal{L}_{\mathrm{reg}}\equiv\bar\chi\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,\chi+\mathrm{i}M\bar\chi\chi\tag{13.106}$$

をそもそものラグランジアンに加える．Pauli-Villars 正則場 χ はボソン的な統計に従うスピノルで，計算の最後に $M\to\infty$ の極限をとる．χ はボソン的であるから，正則化された行列式は

$$\mathrm{e}^{-W[\mathcal{A}]}=\frac{\det\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/}{\det(\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/+\mathrm{i}M)}=\prod_i\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mathrm{i}M}\tag{13.107}$$

となる．λ_i は $\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/$ の i 番目の固有値である；$\mathrm{i}\,\nabla\!\!\!/\,\psi_i=\lambda_i\psi_i$．固有値はパリティ変換のもとで符号を変える；

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}[\gamma^0(\partial_0-\mathcal{A}_0(-t,x))+\gamma^i(\partial_i+\mathcal{A}_i(-t,x))]\mathrm{i}\gamma^0\psi_i(-t,x)\\&=\ \mathrm{i}\gamma^0[\gamma^0(-\partial_\tau-\mathcal{A}_0(\tau,x))-\gamma^i(\partial_i+\mathcal{A}_i(\tau,x))]\mathrm{i}\psi(\tau,x)\\&=\ -\lambda_i\mathrm{i}\gamma^0\psi_i(\tau,x)\end{aligned}$$

ここに $\tau = -t$ とおいた．したがって，有効作用 $W[\mathcal{A}]$ はパリティ変換 P のもとで

$$W[\mathcal{A}] \to W[\mathcal{A}^{\mathrm{P}}] = -\ln\prod \frac{-\lambda_i}{-\lambda_i + \mathrm{i}M} = \overline{W[\mathcal{A}]} \tag{13.108}$$

と変換する．ここに $\overline{}$ は複素共役を表す．(13.108) 式は W の虚部がパリティを破る部分であることを示している；

$$W[\mathcal{A}] - W[\mathcal{A}^{\mathrm{P}}] = 2\mathrm{Im}W[\mathcal{A}] \tag{13.109}$$

Im $W[\mathcal{A}]$ は §12.8 で定義した η-不変量である．実際

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}W[\mathcal{A}] &= \lim_{M\to\infty}\mathrm{Im}\left(-\sum_i \ln\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mathrm{i}M}\right) = \lim_{M\to\infty}\sum_i \tan^{-1}(M/\lambda_i) \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\sum_{\lambda>0}1 - \sum_{\lambda<0}1\right) = \frac{\pi}{2}\eta\end{aligned} \tag{13.110}$$

が示される．このように Pauli-Villars 正則場は，正則化された η-不変量を与える．結局

$$\mathrm{Im}W[\mathcal{A}] = \frac{\pi}{2}\eta = \frac{\pi}{2}\lim_{s\to 0}{\sum_i}' \mathrm{sgn}\lambda_i|\lambda_i|^{-2s} \tag{13.111}$$

が示された．

13.6.2 次元の梯子：4 − 3 − 2

Alvarez-Gaumé 達 (1985) が示したように，パリティ・アノマリー (13.110) が $(2l+2)$-次元空間におけるカイラル・アノマリーと密接に関係していることは，興味深い事実である．Forte (1987) にしたがって，**次元の梯子**

$$\begin{array}{c}4\text{ 次元可換アノマリー}\\ \downarrow \\ 3\text{ 次元パリティ・アノマリー} \\ \downarrow \\ 2\text{ 次元非可換アノマリー}\end{array} \tag{13.112}$$

を調べよう．

$M_4 = S^2 \times S^2$ を 4 次元空間としてとる．可換アノマリーは，指数

$$\mathrm{ind}\ \mathrm{i}\,\nabla\!\!\!\!/\,_4 = \mathcal{H}_+ - \mathcal{H}_- = \int_{S^2\times S^2}\partial_\mu j_5^\mu = \int_{S^2\times S^2}\mathrm{ch}_2(\boldsymbol{F}) \tag{13.113}$$

によって与えられる．前と同様に $\mathcal{N}_+$ $(\mathcal{N}_-)$ は，カイラリティ $+$ $(-)$ のゼロ・モードの数を表す．$\mathrm{ch}_2(\mathbb{F})$ の Chern-Simons 形式を Q_3 としよう；$\mathrm{ch}_2(\mathbb{F}) = dQ_3(\mathbb{A},\mathbb{F})$．すると $\mathcal{N} = \mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_-$ は

$$\mathcal{N} = \int_{S^2\times S^2}\mathrm{ch}_2(\boldsymbol{F}) = \int_{U_{\mathrm{N}}\times S^2}\mathrm{d}Q_3(\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}},\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}) + \int_{U_{\mathrm{S}}\times S^2}\mathrm{d}Q_3(\boldsymbol{A}_{\mathrm{S}},\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}})$$

$$= \int_{S^1\times S^2}[Q_3(\boldsymbol{A}_\mathrm{N},\boldsymbol{F}_\mathrm{N}) - \mathrm{d}Q_3(\boldsymbol{A}_\mathrm{S},\boldsymbol{F}_\mathrm{S})]$$
$$= \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^1\times S^2}\mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g)^3 \tag{13.114}$$

で与えられる．ここに g は $\mathbb{A}_\mathrm{N}$ と $\mathbb{A}_\mathrm{S}$ を結ぶゲージ変換である；$\mathbb{A}_\mathrm{N} = g^{-1}(\mathbb{A}_\mathrm{S} + \mathrm{d} + \mathrm{d}_\theta)g$．前節で $\mathcal{N}$ は非可換アノマリーも表すことを示した；

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\frac{\partial w(\mathcal{A},\theta)}{\partial\theta} \tag{13.115a}$$

ここに w は

$$\det\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}^{g(\theta)}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}w(\mathcal{A},\theta)}\det\mathrm{i}\hat{D}(\mathcal{A}) \tag{13.115b}$$

で定義される．$\mathcal{A}$ は基準となるゲージ・ポテンシャルで

$$\mathcal{A}^{g(\theta)} = g^{-1}(x,\theta)(\mathcal{A}+\mathrm{d})g(x,\theta) \qquad \mathrm{i}\hat{D} = \not{\partial} + \not{\mathcal{A}}D_+$$

である．

次に，$\mathcal{N}$ は 3 次元空間におけるパリティ・アノマリーにも関係していることを示す．$\mathrm{i}\not{\nabla}_3$ を 3 次元 Dirac 作用素とし，

$$\mathrm{ind}\not{D}_4[\mathcal{A}] \equiv \mathrm{i}\sigma_1\otimes\mathbf{1}\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_2\otimes\mathrm{i}\not{\nabla}_3[\mathcal{A}_t] \tag{13.116}$$

で与えられる 4 次元の Dirac 作用素を定義しよう．$\mathcal{A}_t$ は $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{t=0}$ と $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_{t=1}$ を内挿するゲージ・ポテンシャルである．この演算子に対する Atiyah-Patodi-Singer の指数定理 (§12.8) は

$$\mathrm{ind}\ \mathrm{ind}\not{D}_4 = -\int_{S^2\times S^2\times I}\mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) + \frac{1}{2}[\eta(t=1) - \eta(t=0)] \tag{13.117}$$

となる．ただし Dirac 種数 $\hat{A}$ は $S^2\times S^2\times I$ 上で自明であることを用いた．$\mathcal{A}_0$ と $\mathcal{A}_1$ がゲージ変換 g で

$$\mathcal{A}_1 = g^{-1}(\mathcal{A}_0+\mathrm{d})g \tag{13.118a}$$

と結ばれているとし，それを内挿するポテンシャル

$$\mathcal{A}_t \equiv t\mathcal{A}_1 + (1-t)\mathcal{A}_0 \tag{13.118b}$$

を考えよう．$\mathrm{i}\not{\nabla}_3$ のスペクトルはゲージ不変であり，特に $\mathrm{Speci}\not{\nabla}_3(\mathcal{A}_0) = \mathrm{Speci}\not{\nabla}_3(\mathcal{A}_1)$ が成り立つので，η-不変量もやはりゲージ不変である．[奇数次元の空間にはゲージ・アノマリーは存在しないことに注意．] すると $\eta(t=0) = \eta(t=1)$ となり，APS 指数定理 (13.117) は

$$\text{スペクトル流} = \mathrm{ind}\ \mathrm{i}\not{D}_4(\mathcal{A}_t)$$
$$= \int_{S^2\times S^2}\mathrm{ch}_2(\mathcal{F}) = \int_{S^2\times S^2}[Q_3(\mathcal{A}_1,\mathcal{F}_1) - Q_3(\mathcal{A}_0,\mathcal{F}_0)]$$
$$= \int_{S^1\times S^2}Q_3(g^{-1}\mathrm{d}g, 0) = \mathcal{N} \tag{13.119}$$

を与える．したがって 3 次元理論におけるスペクトル流は指数 $\mathcal{N}$ によって与えられる．

まとめると，写像 $g: S^2\times S^1\to G$ には 3 通りの解釈がある：

(1) g は $S^2 \times S^2$ 上の G 束の 2 つの部分の境界における遷移関数であり，4 次元における可換アノマリーを与える．

(2) $\mathcal{A}_0$ と $\mathcal{A}_1 = g^{-1}(\mathcal{A}_0 + \mathrm{d})g$ は $S^2 \times S^1$ 上のゲージ・ポテンシャルとする．ゲージ変換 g は Speci $\not\nabla_3(\mathcal{A}_0)$ と Speci $\not\nabla_3(\mathcal{A}_1)$ の間のスペクトル流 $\mathcal{N}$ を与える．

(3) $g : S^2 \times S^1 \to G$ は，写像 $S^1 \to \mathfrak{G}$ を引き起こし，その巻き数 $\mathcal{N}$ は 2 次元空間における非可換アノマリーを与える．

このようにして，**次元の梯子** $4-3-2$ が得られた．高次元への拡張は容易である．

第14章　ボソン的弦理論

この章では，ボソン的な弦理論の 1 ループ振幅を解析する．ここで扱う例は，26 次元の Euclid 空間における閉じた向き付け可能なボソン的弦理論という，最も簡単なものである．[なぜ $D = 26$ 次元かについては §14.2 で明らかにされる．] 弦の作用としては，種数 g の Riemann 面 Σ_g で定義された Polyakov 作用

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_g} \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu - \frac{\lambda}{4\pi}\int_{\Sigma_g} \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\mathcal{R} \tag{14.1}$$

を採用する．第 2 項は Euler 標数 $\chi = 2 - 2g$ に比例し，したがって多ループの振幅の間の相対的な重みを決定する；g-ループ振幅は $\exp(-\lambda g)$ に比例する．(14.1) には相殺項 (カウンター項) は含まれていない．

以下の節では，ボソン的弦理論の経路積分を扱う．まず，それに必要な数学的道具，すなわち Riemann 面の微分幾何学を紹介する．次に真空振幅の経路積分表示を書き下す．さらに，例として 1 ループの真空振幅を計算する．我々の扱いは D'Hoker and Phong (1986), Polchinski (1986) および Moore and Nelson (1986) に基づいている．これらのトピックスに関しては，多くの解説が存在する．例えば Alvarez-Gaumé and Nelson (1986)，Bagger (1987)，D'Hoker and Phong (1988) や Weinberg (1987) などを参照されたい．

14.1　Riemann 面上の微分幾何

Riemann 面は，境界がない実 2 次元多様体である．本書では Riemann 面について，至る所で言及してきた．本節では，この章をそれだけで読めるように，Riemann 面について基本的な事実をまとめる．同時に，Riemann 面について，いくつかの新しい側面を紹介する．これらの解説は，読者がボソン的弦理論の振幅を学ぶ上で，十分な背景を与えるであろう．

14.1.1　計量と複素構造

種数 g の Riemann 面を Σ_g で表す．例 7.9 で言及したように，Σ_g の任意の座標近傍 U において，計量が

$$g = \mathrm{e}^{2\sigma(\xi)}(\mathrm{d}\xi^1\otimes\mathrm{d}\xi^1 + \mathrm{d}\xi^2\otimes\mathrm{d}\xi^2) \tag{14.2}$$

のように共型的平坦となる**等温座標** (ξ^1, ξ^2) が存在する．ここで複素座標

$$z = \xi^1 + \mathrm{i}\xi^2 \qquad \bar{z} = \xi^1 - \mathrm{i}\xi^2 \tag{14.3}$$

を導入する．微分形式やベクトルは

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}\xi^1 + \mathrm{i}\mathrm{d}\xi^2 \qquad \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}\xi^1 - \mathrm{i}\mathrm{d}\xi^2 \tag{14.4a}$$

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right) \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi^1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\right) \tag{14.4b}$$

によって張られる．複素座標を用いると，計量は

$$g = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\sigma(z,\bar{z})}[\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar{z} + \mathrm{d}\bar{z} \otimes \mathrm{d}z] \tag{14.5}$$

と表される．g の成分は

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\sigma} \qquad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{14.6a}$$

$$g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2\mathrm{e}^{-2\sigma} \qquad g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{14.6b}$$

となる．

V を $U \cap V \neq \emptyset$ を満たす Σ_g の別の座標近傍とし，(w^1, w^2) を V の複素座標とする．V 上の計量は

$$g = \mathrm{e}^{2\sigma'(w,\bar{w})}\mathrm{d}w \otimes \mathrm{d}\bar{w} \tag{14.7}$$

とかかれる．$U \cap V$ 上で (14.5) と (14.7) は一致するので

$$\mathrm{e}^{2\sigma(z,\bar{z})}\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{e}^{2\sigma'(w,\bar{w})}\mathrm{d}w \otimes \mathrm{d}\bar{w}$$

が成り立つ．また

$$\begin{aligned}\mathrm{d}w \otimes \mathrm{d}\bar{w} &= [(\partial w/\partial z)\mathrm{d}z + (\partial w/\partial \bar{z})\mathrm{d}\bar{z}] \otimes [(\partial \bar{w}/\partial z)\mathrm{d}z + (\partial \bar{w}/\partial \bar{z})\mathrm{d}\bar{z}] \\ &\propto \mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar{z}\end{aligned}$$

から $\partial w/\partial\bar{z} = \partial\bar{w}/\partial z = 0$ でなければならない．[$(z, \bar{z})$ と $(w, \bar{w})$ が同じ向きを与えるならば，もう一つの可能性 $\partial w/\partial z = \partial\bar{w}/\partial\bar{z} = 0$ は除外される．] したがって

$$w = w(z), \qquad \bar{w} = \bar{w}(\bar{z}) \tag{14.8}$$

となり，Σ_g が複素多様体であることが示された．また σ と σ' は

$$\mathrm{e}^{2\sigma(z,\bar{z})} = \mathrm{e}^{2\sigma'(w,\bar{w})}|\partial w/\partial z|^2 \tag{14.9}$$

で結ばれている．

14.1.2　ベクトル，微分形式，テンソル

ベクトル場 $V^z\partial/\partial z \in TM^+$ と $V^{\bar{z}}\partial/\partial\bar{z} \in TM^-$ の成分は

$$V^w = (\partial w/\partial z)V^z \qquad V^{\bar{w}} = (\partial\bar{w}/\partial\bar{z})V^{\bar{z}} \tag{14.10}$$

と変換する．微分形式 $\omega_z \mathrm{d}z \in \Omega^{1,0}(M)$ と $\omega_{\bar{z}} \mathrm{d}\bar{z} \in \Omega^{1,0}(M)$ は

$$\omega_w = (\partial w/\partial z)^{-1}\omega_z \qquad \omega_{\bar{w}} = (\partial \bar{w}/\partial \bar{z})^{-1}\omega_{\bar{z}} \tag{14.11}$$

と変換する．これらは Σ_g 上の正則 (反正則) 直線束 の切断と見ることができる．(これらの切断の遷移関数は，正則 (反正則) である．) 計量は

$$\omega_{\bar{z}} = g_{\bar{z}z}V^z, \qquad V^z = g^{z\bar{z}}\omega_{\bar{z}} \tag{14.12}$$

により TM^+ と $\Omega^{0,1}(M)$ の間の自然な同型を与える．同様に

$$\omega_z = g_{z\bar{z}}V^{\bar{z}}, \qquad V^{\bar{z}} = g^{\bar{z}z}\omega_z \tag{14.13}$$

により TM^- と $\Omega^{1,0}(M)$ は同型となる．一般に，任意のテンソルが与えられたとき，計量を用いてすべての $\bar{z}$ 添字を z 添字と交換することができる：

$$T^{\overbrace{z\ldots z}^{q_1}\overbrace{\bar{z}\ldots\bar{z}}^{q_2}}_{\underbrace{z\ldots z}_{p_1}\underbrace{\bar{z}\ldots\bar{z}}_{p_2}} \to T^{\overbrace{z\ldots z}^{q_1+p_2}}_{\underbrace{z\ldots z}_{p_1+q_2}} = (g_{z\bar{z}})^{q_2}(g^{z\bar{z}})^{p_2}\, T^{\overbrace{z\ldots z}^{q_1}\overbrace{\bar{z}\ldots\bar{z}}^{q_2}}_{\underbrace{z\ldots z}_{p_1}\underbrace{\bar{z}\ldots\bar{z}}_{p_2}} \tag{14.14}$$

この対応は，あきらかに同型である．例えば

$$T_{z\bar{z}}{}^{\bar{z}} \to g^{z\bar{z}}g_{z\bar{z}}T_{z\bar{z}}{}^{\bar{z}} = T_z{}^z{}_z$$

と書かれる．したがって z 添字のみをもつテンソルだけを考えればよい．これらのテンソルに対し，ヘリシティを定義しよう．テンソル T は z 添字のみをもっているので，座標変換 $z \to w$ のもとで

$$T \to \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^n T \tag{14.15}$$

と変換する．ここに $n \in \mathbb{Z}$ は，上付きの z 添字の数から下付の z 添字の数を引いた整数である．例えば

$$T^{zz}{}_z \to T^{ww}{}_w = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)T^{zz}{}_z$$

より，この T に対し $n = 1$ となる．重要なのは，上付き添字と下付き添字の数の 差 である．この数 n をヘリシティとよぶ．ヘリシティが n のテンソルが作る空間を $\mathcal{T}^n$ で表す；

$$\mathcal{T}^n \equiv \{T^{\overbrace{z\ldots z}^{q}}{}_{\underbrace{z\ldots z}_{p}} | q - p = n\} \tag{14.16}$$

ヘリシティは $\mathrm{U}(1) = \mathrm{SO}(2)$ の既約表現を分類する量である．

[注：これまで n は整数であると仮定してきたが，$n = \frac{1}{2}$ のとき T は Σ_g 上のスピノルに対応することが示される．実際，Riemann 面上にスピノルが存在することは，Σ_g の 第 2 Stiefel-Whitney 類が自明であることから保証されている．$\mathcal{T}^1$ は Σ_g 上の正則直線束 K の切断と同一視される．すると $\mathcal{T}^{1/2}$ は K の‘ルート’となる：S_+ を正のカイラリティをもつスピン束とすると $S_+^2 = K = \mathcal{T}^1$．同様に S_- を負のカイラリティをもつスピン束とすると $\mathcal{T}^{-1} = \bar{K} = S_-^2$ となる．]

例 14.1 実座標を使うと，ヘリシティ ±1 のベクトルは $V^1 \pm \mathrm{i}V^2$ となる．なぜならば

$$V^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} + V^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} = (V^1 + \mathrm{i}V^2)\partial_z + (V^1 - \mathrm{i}V^2)\partial_{\bar{z}}$$

となるからである．$V^z = V^1 + \mathrm{i}V^2$ および $V^{\bar{z}} = V^1 - \mathrm{i}V^2 \simeq V_z$ とおく．T を対称で跡がゼロの 2 階テンソルとすると，ヘリシティ ±2 のテンソルは $T^{11} \pm \mathrm{i}T^{12}$ で与えられる．実際

$$\begin{aligned} & T^{11}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^1} - \frac{\partial}{\partial \xi^2} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^2}\right) + T^{12}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \otimes \frac{\partial}{\partial \xi^1}\right) \\ = \; & 2(T^{11} + \mathrm{i}T^{12})\partial_z \otimes \partial_z + 2(T^{11} - \mathrm{i}T^{12})\partial_{\bar{z}} \otimes \partial_{\bar{z}} \end{aligned}$$

となる．明らかに $T^{zz} = 2(T^{11} + \mathrm{i}T^{12})$ はヘリシティ +2 をもち，$T^{\bar{z}\bar{z}} = 2(T^{11} - \mathrm{i}T^{12})$ はヘリシティ −2 をもつ ($g_{z\bar{z}} g_{z\bar{z}} T^{\bar{z}\bar{z}} = T_{zz}$ に注意).

14.1.3 共変微分

Σ_g の Christoffel 記号のうち，ゼロでない成分は

$$\Gamma^z{}_{zz} = g^{z\bar{z}} \partial_z g_{z\bar{z}} = 2\partial_z \sigma, \qquad \Gamma^{\bar{z}}{}_{\bar{z}\bar{z}} = g^{\bar{z}z} \partial_{\bar{z}} g_{\bar{z}z} = 2\partial_{\bar{z}} \sigma \tag{14.17}$$

のみである ((8.69) を見よ)．$\mathcal{T}^n$ のテンソルに対して，2 種類の共変微分

$$\nabla^z_{(n)} : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^{n+1}, \quad \nabla_z^{(n)} : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^{n-1}$$

を定義しよう．

$$T^{\overbrace{z\ldots z}^{q}}{}_{\underbrace{z\ldots z}_{p}} \in \mathcal{T}^n (q - p = n)$$

とする．この T に対し

$$\begin{aligned} \nabla^z_{(n)} T^{z\ldots z}{}_{z\ldots z} &= g^{z\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} T^{z\ldots z}{}_{z\ldots z} \\ &= g^{z\bar{z}} [\partial_{\bar{z}} + (q-p)\Gamma^z{}_{\bar{z}z}] T^{z\ldots z}{}_{z\ldots z} \\ &= g^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} T^{z\ldots z}{}_{z\ldots z} \end{aligned} \tag{14.18a}$$

$$\begin{aligned} \nabla_z^{(n)} T^{z\ldots z}{}_{z\ldots z} &= \nabla_z T^{z\ldots z}{}_{z\ldots z} \\ &= [\partial_z + (q-p)\Gamma^z{}_{zz}] T^{z\ldots z}{}_{z\ldots z} \\ &= (\partial_z + 2n\partial_z \sigma) T^{z\ldots z}{}_{z\ldots z} \end{aligned} \tag{14.18b}$$

と定義する．(14.18b) において $2n\partial_z \sigma$ は，ゲージ・ポテンシャル $\mathcal{A}$ のように作用する．同様に $\bar{z}$ に関する共変微分を定義しよう；

$$\nabla^{\bar{z}}_{(n)} = g^{\bar{z}z} \nabla_z^{(n)}, \qquad \nabla_{\bar{z}}^{(n)} = g_{\bar{z}z} \nabla^z_{(n)} \tag{14.19}$$

Chirstoffel 記号から導かれる曲率 2-形式とスカラー曲率は

$$\mathcal{F} = R^z{}_{zz\bar{z}} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -\partial_{\bar{z}}(2\partial_z \sigma) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$$

$$= -2\partial_z\partial_{\bar{z}}\sigma \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} \tag{14.20a}$$

$$\mathcal{R} = g^{\bar{z}z}Ric_{\bar{z}z} + g^{z\bar{z}}Ric_{z\bar{z}} = -8\mathrm{e}^{-2\sigma}\partial_z\partial_{\bar{z}}\sigma \tag{14.20b}$$

である．

問 14.1

$$\nabla^z_{(n)} = 2\mathrm{e}^{-2\sigma}\partial_{\bar{z}}, \qquad \nabla^{(n)}_z = \mathrm{e}^{-2n\sigma}\partial_z\mathrm{e}^{2n\sigma} \tag{14.21a}$$

$$\nabla^{\bar{z}}_{(n)} = 2\mathrm{e}^{-2(n+1)\sigma}\partial_z\mathrm{e}^{2n\sigma}, \qquad \nabla^{(n)}_{\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \tag{14.21b}$$

を確かめよ．

$\nabla^z_{(n)}$ と $\nabla^{(n)}_z$ は，適切に定義された内積に関し，互いに随伴な演算子である．$T, U \in \mathcal{T}^n$ とする．内積は，正則座標変換 $z \to w$ のもとで不変であることを要請しよう．

$$g_{z\bar{z}} \to |\mathrm{d}w/\mathrm{d}z|^{-2}g_{z\bar{z}}, \qquad \mathrm{d}^2z\sqrt{g} \to \mathrm{d}^2w\sqrt{g}$$

$$\bar{T} \to (\overline{\mathrm{d}w/\mathrm{d}z})^n\bar{T}, \qquad U \to (\mathrm{d}w/\mathrm{d}z)^nU$$

であるから，

$$(T, U) \equiv \int \mathrm{d}^2z\sqrt{g}(g_{z\bar{z}})^n\bar{T}U \tag{14.22}$$

は正則座標変換のもとで不変となる．$T \in \mathcal{T}^n, U \in \mathcal{T}^{n+1}$ をとる．すると

$$\begin{aligned}
(U, \nabla^z_{(n)}T) &= \int \mathrm{d}^2z\ \mathrm{e}^{2\sigma}2^{-n-1}\mathrm{e}^{2(n+1)\sigma}\bar{U}2\mathrm{e}^{-2\sigma}\partial_{\bar{z}}T \\
&= -2^{-n}\int \mathrm{d}^2z\ T\partial_{\bar{z}}[\mathrm{e}^{2(n+1)\sigma}\bar{U}] \quad (\text{部分積分}) \\
&= -2^{-n}\int \mathrm{d}^2z\ T\mathrm{e}^{(2n+1)\sigma}\overline{[\partial_zU + (2n+1)(\partial_z\sigma)U]} \\
&= -\overline{\int \mathrm{d}^2z\ \sqrt{g}(g_{z\bar{z}})^n[\nabla^{(n+1)}_zU]\bar{T}} = \overline{(-\nabla^{(n+1)}_zU, T)}
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって

$$(\nabla^z_{(n)})^\dagger = -\nabla^{(n+1)}_z \tag{14.23a}$$

が得られた．

問 14.2

$$(\nabla^{(n)}_z)^\dagger = -\nabla^z_{(n-1)} \tag{14.23b}$$

を示せ．

2 種類のラプラシアン $\Delta^\pm_{(n)} : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^{m\pm1} \to \mathcal{T}^n$ を

$$\Delta^+_{(n)} \equiv -\nabla^{(n+1)}_z\nabla^z_{(n)} = -2\mathrm{e}^{-2\sigma}[\partial_z\partial_{\bar{z}} + 2n(\partial_z\sigma)\partial_{\bar{z}}] \tag{14.24a}$$

$$\Delta^-_{(n)} \equiv -\nabla^z_{(n-1)}\nabla^{(n)}_z = -2\mathrm{e}^{-2\sigma}[\partial_z\partial_{\bar{z}} + 2n(\partial_z\sigma)\partial_{\bar{z}} + 2n(\partial_z\partial_{\bar{z}}\sigma)] \tag{14.24b}$$

で定義すると

$$\Delta^+_{(n)} - \Delta^-_{(n)} = 4n\mathrm{e}^{-2\sigma}(\partial_z\partial_{\bar{z}}\sigma) = -\frac{1}{2}n\mathcal{R} \tag{14.25}$$

が成り立つ．したがって，特に

$$\Delta^+_{(0)} = \Delta^-_{(0)}(\equiv \Delta_{(0)}) \tag{14.26}$$

が成り立つ．

14.1.4 Riemann-Roch の定理

D'Hoker and Phong (1988) にしたがって，Atiyah-Singer の指数定理から，Riemann-Roch の定理の一つの形を導く．

定理 14.1 (Riemann-Roch) Σ_g を，種数 g の Riemann 面とする．すると，演算子 $\nabla^{(n)}_z$ の指数は

$$\dim_{\mathbb{C}}\ker\nabla^{(n)}_z - \dim_{\mathbb{C}}\ker\nabla^z_{(n-1)} = (2n-1)(g-1) \tag{14.27}$$

で与えられる．

証明: 熱核を用いて指数を導こう．まず $\ker\nabla^{(n)}_z = \ker\Delta^-_{(n)}$ および $\ker\nabla^z_{(n-1)} = \ker\Delta^+_{(n-1)}$ に注意しよう ((14.24) を見よ)．$\Delta^+_{(n)}$ の熱核 $\mathcal{K}^+$ は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta^+_{(n)}\right)\mathcal{K}^+_n(z,w;t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta - V_n\right)\mathcal{K}^+_n(z,w;t) = 0$$

を満たす．ここに $\Delta \equiv -2\partial_z\partial_{\bar{z}}$ は平らな空間のラプラシアンで

$$V_n \equiv \Delta - \Delta^+_{(n)} = (1-\mathrm{e}^{-2\sigma})\Delta + 4n\mathrm{e}^{-2\sigma}\partial_z\sigma\partial_{\bar{z}}$$

である．Δ もまた

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)K(z,w;t) = 0$$

によって熱核を定義するが，この解は直ちに求められて

$$K(z,w;t) = \frac{1}{4\pi t}\mathrm{e}^{-|z-w|^2/2t}$$

と解くことができる．摂動と逐次近似により

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^+_n(z,z';t) &= K(z,z';t) \\
&\quad + \int_0^t \mathrm{d}s \int \mathrm{d}w\ K(z,w;t-s)V_n(w)\mathcal{K}^+_n(w,z';s) \\
&= K(z,z';t) + \int \mathrm{d}s \int \mathrm{d}w\ K(z,w;t-s)V_n(w)K(w,z';s) \\
&\quad + \int \mathrm{d}s \int \mathrm{d}s' \int \mathrm{d}v \int \mathrm{d}w\ K(z,v;t-s)V_n(v) \\
&\quad \times K(v,w;s-s')V_n(w)K(w,z';s') \\
&\quad + \ldots
\end{aligned}$$

が求められる．とくに，t が小さい時の $\mathcal{K}_n^+$ は

$$\mathcal{K}_n^+(z,z;t) = \frac{1}{4\pi t} + \int_0^t \mathrm{d}s \int \mathrm{d}w\ K(z,w;t-s)V_n(w)K(w,z;s) + \mathcal{O}(t) \tag{14.28}$$

となる．z において $\sigma = 0$ を満たす座標系をとると

$$\begin{aligned}\sigma(w) \ &\simeq\ 0 + \partial_z\sigma(w-z) + \partial_{\bar z}\sigma(\bar w - \bar z)\\ &\quad + \frac{1}{2}[\partial_z^2\sigma(w-z)^2 + \partial_{\bar z}^2\sigma(\bar w - \bar z)^2 + 2\partial_z\partial_{\bar z}\sigma|w-z|^2] + \ldots\end{aligned}$$

が得られる．2 次元空間における回転対称性から，(14.28) 式の積分において残るのは，一つの z-微分と一つの $\bar z$-微分がある項だけである．$\partial_z\sigma\partial_{\bar z}\sigma$ に比例する項は，展開の第 2 項と第 3 項でキャンセルし，$\partial_z\partial_{\bar z}\sigma$ に比例する項のみが残る．ここで

$$\begin{aligned}&\int_0^t \mathrm{d}s \int \mathrm{d}^2w\ K(z,w;t-s)\\ &\qquad \times[2\partial_z\partial_{\bar z}\sigma|\bar w - \bar z|^2\Delta_w + 4n(\bar w - \bar z)\partial_z\partial_{\bar z}\sigma\partial_{\bar w}]K(w,z;s)\end{aligned}$$

を求めなければならない．恒等式

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^2w\ K(z,w;t-s)|w-z|^2\Delta_w K(w,z;s)\\ &= \frac{1}{16\pi^2 s^2(t-s)}\int \mathrm{d}^2w|w|^2\exp\left(-\frac{t}{2s(t-s)}|w|^2\right)\\ &\quad -\frac{1}{32\pi^2 s^3(t-s)}\int \mathrm{d}^2w|w|^4\exp\left(-\frac{t}{2s(t-s)}|w|^2\right)\\ &= \frac{(t-s)(2s-t)}{2\pi t^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}^2w\ K(z,w;t-s)(\bar z - \bar w)\partial_{\bar w}K(w,z;s)\\ &= \frac{1}{32\pi^2 s^2(t-s)}\int \mathrm{d}^2w\exp\left(-\frac{t}{2s(t-s)}|w|^2\right) = \frac{t-s}{4\pi t^2}\end{aligned}$$

から

$$\mathcal{K}_n^+(z,z;t) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{1+3n}{12\pi}\Delta\sigma + \mathcal{O}(t) \tag{14.29a}$$

が得られる．同様に $\Delta_{(n)}^-$ の熱核 $\mathcal{K}_n^-$ の対角部分は

$$\mathcal{K}_n^-(z,z;t) = \frac{1}{4\pi t} + \frac{1-3n}{12\pi}\Delta\sigma + \mathcal{O}(t) \tag{14.29b}$$

で与えられる．(14.29) 式と (14.20b) 式から

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}\nabla_z^{(n)} &= \int \mathrm{d}^2z\left(\frac{1-3n}{12\pi} - \frac{1+3(n-1)}{12\pi}\right)\Delta\sigma = \frac{1-2n}{8\pi}\int \mathrm{d}^2x\mathcal{R}\\ &= -\frac{2n-1}{2}\chi(\Sigma_g) = (2n-1)(g-1)\end{aligned}$$

が示された．ここに

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2x\mathcal{R} = 2-2g$$

は Σ_g の Euler 標数である．∎

14.2 ボソン的弦の量子力学

これで Polyakov 形式によるボソン的弦理論を解析する準備ができた．それは幾何学に関する経路積分である．弦の作用は非常に多くの対称性をもっているので，幾何学に関する経路積分を実行する上で，独立な幾何学を一度だけ含めるように特別の注意を払わなければならない．これは Faddeev-Popov トリックを用いて実現される．ここでの議論は最も簡単な場合，すなわち閉じた向き付け可能なボソン的弦 (Riemann 面上のボソン的弦) に限られる．

14.2.1 Polyakov 弦の真空振幅

経路積分形式の一般的処方によると，弦理論の分配関数 (真空-真空振幅) は

$$Z = \sum_{g=0}^{\infty} Z_g = \sum_{g=0}^{\infty} \int \mathcal{D}X\mathcal{D}\gamma \mathrm{e}^{-S[X,\gamma]} \tag{14.30}$$

で与えられる (図 14.1 を見よ)．混乱を避けるために，種数を g で，計量を γ で表す．種数に関して和をとることは，トポロジーに関して和をとることに等しい．g-ループ振幅 Z_g は Σ_g 上の計量 γ とすべての埋め込み X に関して積分することにより与えられる．以下で見るように，測度 $\mathcal{D}X\mathcal{D}\gamma$ は数学的には適切に定義されておらず，ある変更が必要である．弦の作用 $S[X,\gamma]$ は

$$S[X,\gamma] \equiv \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{\lambda}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\mathcal{R} \tag{14.31}$$

にとる．最初の項は Polyakov 作用である．2 番目の項は Euler 標数

$$\chi = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\mathcal{R} = 2-2g$$

に比例し，弦の結合定数の役目をする：種数 g のループの振幅は $\mathrm{e}^{-2\lambda g}$ に比例する．この項は位相不変量であるから弦のダイナミックスには影響を与えず，したがって以下では無視する．作用の第 1 項は次の対称性をもっている (§7.10)：

(A) $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$，すなわち微分同相写像 $f:\Sigma_g \to \Sigma_g$ の群．$\xi^\alpha \to \xi'^\alpha(\xi)$ を f の座標表示とする．新しい計量は，古い計量の引き戻しで，その成分は

$$\gamma_{\alpha\beta} \to f^*\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial\xi^\gamma}{\partial\xi'^\alpha}\frac{\partial\xi^\delta}{\partial\xi'^\beta}\gamma_{\gamma\delta} \tag{14.32}$$

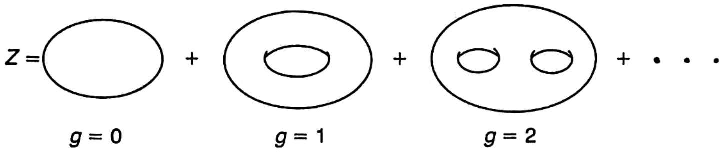


図 14.1. 全真空振幅は g-ループ振幅を足しあげて求められる．

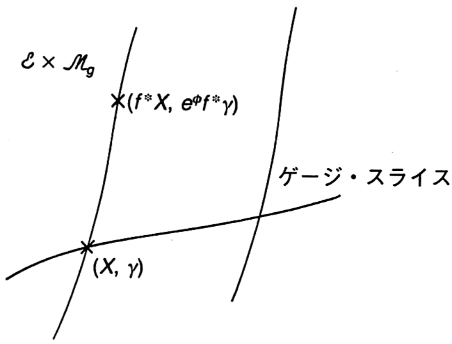


図 **14.2.** $\mathcal{E}\times\mathcal{M}_g$ の元は，ゲージ・スライスの中の元 (X,γ) に $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)*\mathrm{Weyl}(\Sigma_g)$ を作用させて得られる．

で与えられる．埋め込みも同様に変換され

$$X^\mu \to f^*X^\mu = X^\mu f \tag{14.33}$$

となる．古典的作用の不変性は

$$S[X,\gamma] = S[f^*X, f^*\gamma] \tag{14.34}$$

と表される．

(B) $\mathrm{Weyl}(\Sigma_g)$，すなわち 2 次元の Weyl スケーリング

$$\gamma_{\alpha\beta} \to \hat{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{e}^\phi\gamma_{\alpha\beta} \tag{14.35}$$

の群．ただし $\phi\in\mathcal{F}(\Sigma_g)$ である．S の共形不変性は

$$S[X,\gamma] = S[X,\hat{\gamma}] \tag{14.36}$$

と表される．対称性 (A) と (B) は量子化の過程で保存されなければならない．さもなくば，理論はアノマリーをもつ．

通常の Faddeev-Popov 形式によると，Z_g を定義するときに，上の対称性に対応する自由度は除かなければならない．例えば，(X_1,γ_1) と (X_2,γ_2) が $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ のある元によって結ばれているときは，これらによって指定される弦の配置は，独立にカウントされてはならない．同様に (X,γ) と $(X,\mathrm{e}^\phi\gamma)$ は，独立な要素としてカウントされてはならない．したがって，特別な注意を払わない限り，同じ配置を無限回カウントすることになり，それは Z_g に破滅的な発散をもたらす．すべての幾何学的なデータ (Z,γ) がつくる空間は，同値類 (ゲージ・スライス) に分けることができ，異なる 2 つの同値類は上に述べた対称操作では結び付けられない (図 14.2 を見よ)．

議論をより数学的にするために，$\mathcal{E}$ をすべての埋め込み $X:\Sigma_g\to\mathbb{R}^D$ の作る空間，$\mathcal{M}_g$ を Σ_g 上のすべての計量が作る空間としよう．経路積分は，ナイーブには $\mathcal{E}\times\mathcal{M}_g$ 上で定義されていると思われる．しかし，対称性 (A) と (B) のために，$G=\mathrm{Diff}(\Sigma_g)*\mathrm{Weyl}(\Sigma_g)$ を

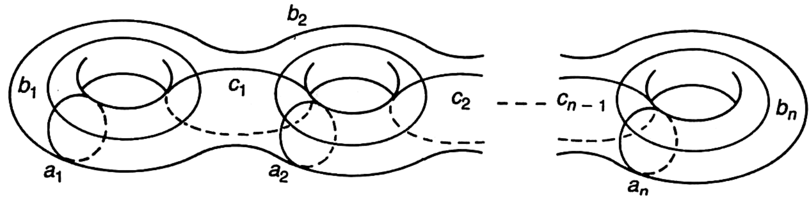


図 **14.3.** 写像類群 (MCG) は a_i, b_i, c_i $(1 \le i \le g)$ の周りの Dehn のひねりによって生成される．

ゲージ群とすると，積分は $(\mathcal{E} \times \mathcal{M}_g)/G$ 上で定義されなければならない．[$*$ は半直積である．$\mathrm{Diff}(\Sigma_g) \cap \mathrm{Weyl}(\Sigma_g) \neq \emptyset$ に注意せよ．この点に関しては，後ほど詳しく議論する．] $(f, \mathrm{e}^{\phi}) \in G$ の $(X, \gamma) \in \mathcal{E} \times \mathcal{M}_g$ への作用は

$$(f, \mathrm{e}^{\phi})(X, \gamma) = (f^* X, \mathrm{e}^{\phi} f^* \gamma) \tag{14.37}$$

である．商空間 $\mathcal{M}_g/G$ は Σ_g の**モジュライ空間**とよばれ $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ と書かれる．また，$\mathrm{Diff}(\Sigma)$ の部分空間で，恒等写像を含む連結成分を $\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ と書く．$\mathrm{Teich}(\Sigma_g) = \mathcal{M}_g/\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g) * \mathrm{Weyl}(\Sigma_g)$ を Σ_g の **Teichmüller 空間**という．Riemann 面の一般論によると $\mathrm{Teich}(\Sigma_g)$ は $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ の有限次元不変被覆空間である．具体的に

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Teich}(\Sigma_g) = \begin{cases} 0 & g = 0 \\ 2 & g = 1 \\ 6g - 6 & g \ge 2 \end{cases} \tag{14.38}$$

が成り立つ．群 $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ は**モジュラー群** (MG)，または**写像類群** (MCG) として知られている．MCG は例 8.2 で定義された **Dehn のひねり**によって生成される．種数 g のトーラスでは MCG は，図 14.3 の a_i, b_i, c_i のまわりの $3g-1$ 個の Dehn のひねりによって生成される．不幸にして，これらの $2g-1$ 個の Dehn のひねりは，生成子の最小の組では<u>ない</u>．$g \ge 2$ における MCG の一般的な形は完全には理解されていない．

これまでの議論から，意味がある分配関数は

$$Z_g \equiv \int_{\mathcal{E} \times \mathcal{M}_g} \frac{\mathcal{D}X \mathcal{D}\gamma}{V(\mathrm{Diff} * \mathrm{Weyl})} \mathrm{e}^{-S[X,\gamma]} \tag{14.39}$$

であることが分かった．$V(\mathrm{Diff} * \mathrm{Weyle})$ は，空間 $\mathrm{Diff}(\Sigma_g) * \mathrm{Weyl}(\Sigma_g)$ の (無限の) 体積で，同じ幾何学的配置を無限個カウントすることにより生じる無限大をキャンセルする．MCG の位数 (有限群の元の数) を $|\mathrm{MCG}|$ とかくと，あきらかに

$$V(\mathrm{Diff} * \mathrm{Weyl}) = |\mathrm{MCG}| V(\mathrm{Diff}_0 * \mathrm{Weyl}) \tag{14.40}$$

が成り立つ．

14.2.2　積分の測度

積分 (14.39) を実行するためには，適切な測度，すなわち物理的な自由度とゲージ自由度（対称性の自由度）が分離するような測度を定義しなければならない．このような自由

度の分離には Jacobi 行列式

$$\mathcal{D}\gamma\mathcal{D}X \to J(\mathcal{D}\text{ physical})(\mathcal{D}\text{ gauge}) \tag{14.41}$$

が必要となる．この Jacobi 行列式を求めるには，多様体 M 上の Jacobi 行列式は TM 上のものと一致することに注意する．これを示すために，$x^\mu(y^\mu)$ を $U\cap V\neq\emptyset$ を満たす M の局所座標系 $U(V)$ の局所座標とする．座標変換の Jacobi 行列式は $J=\det(\partial y^\mu/\partial x^\nu)$ である．一方，$V\in T_pM$ $(p\in U\cap V)$ をとる．座標を使うと $V=u^\mu\partial/\partial x^\mu=v^\mu\partial/\partial y^\mu$ とかかれる．ここに

$$v^\mu=u^\nu(\partial y^\mu/\partial x^\nu) \tag{14.42}$$

である．$\{u^\mu\},\{v^\mu\}$ は T_pM の座標であることに注意しよう．この座標変換に伴う Jacobi 行列式 $\hat{J}$ は

$$\hat{J}=\det(\partial v^\mu/\partial u^\nu)=\det(\partial y^\mu/\partial x^\nu)=J \tag{14.43}$$

で与えられる．したがって $p\in M$ における Jacobi 行列式は T_pM におけるものと等しいことが示された．J は p の座標にのみ依存するので，$\hat{J}$ もベクトルそれ自身には依存せず p の座標にのみ依存する．

例 14.2 (x,y) および (r,θ) を $\mathbb{R}^2$ の座標とする．これらは $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ で結ばれている．座標変換に伴う Jacobi 行列式は

$$J=\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$$

で与えられる．ここで

$$V=v_x\partial/\partial x+v_y\partial/\partial y=v_r\partial/\partial r+v_\theta\partial/\partial\theta\in T_p\mathbb{R}^2$$

をとる．(v_x,v_y) および (v_r,v_θ) は $T_p\mathbb{R}^2$ の座標である．

$$v_x=v_r\partial x/\partial r+v_\theta\partial x/\partial\theta \qquad v_y=v_r\partial y/\partial r+v_\theta\partial y/\partial\theta$$

から，これに伴う Jacobi 行列式は簡単に求められて

$$\hat{J}=\det[\partial(v_x,v_y)/\partial(v_r,v_\theta)]=\begin{vmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta\end{vmatrix}=J$$

となる．

この Jacobi 行列式を，直接的ではないが後で役に立つ方法で求めよう．測度 d^2v を

$$1=\int\mathrm{d}^2v\exp\left(-\frac{1}{2}\|v\|^2\right)=\int\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\exp\left[-\frac{1}{2}(v_x^2+v_y^2)\right]$$

と規格化する．[これは通常の測度と定数因子だけ異なるが，それは重要ではない．] また $\|v\|^2=v_r^2+r^2v_\theta^2$ にも注意する．Jacobi 行列式は v_r にも v_θ にも依存しないので

$$1=J\int\mathrm{d}v_r\mathrm{d}v_\theta\exp\left[-\frac{1}{2}(v_r^2+r^2v_\theta^2)\right]=Jr^{-1}$$

が導かれ，これから $J=r$ が得られる．後に，この手続きで弦理論における汎関数測度を求める．[接空間は Jacobi 行列式を求めるためだけに導入されたことに注意されたい．今の場合，接空間それ自身に物理的な意味はない．]

これまでの解析により，$\delta\gamma$ (δX) を計量 γ (埋め込み X) の微小な変化とすると

$$\mathcal{D}\delta\gamma\ \mathcal{D}\delta X = J\mathcal{D}\delta(\text{physical})\mathcal{D}\delta(\text{gauge}) \tag{14.44}$$

と書かれることが示された．$\delta\gamma$ (δX) は $T_\gamma\mathcal{M}_g$ $(T_X\mathcal{E})$ の元とみなされる．(14.44) 式の右辺の意味は以下で明らかになる．

Σ_g 上の無限小ベクトル場 δv によって生成される微分同相写像を考えよう．δv は無限小なので，この微分同相写像は群 $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ の中の $\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ に属する．δv のもとでの計量と埋め込みの変化は

$$\delta_D\gamma_{\alpha\beta} = (\mathcal{L}_{\delta v}\gamma)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha\delta v_\beta + \nabla_\beta\delta v_\alpha \qquad \delta_D X = \delta v^\alpha\partial_\alpha X \tag{14.45}$$

で与えられる．一方，無限小 Weyl スケーリング $e^{\delta\phi}$ のもとでの γ と X の変化は

$$\delta_W\gamma_{\alpha\beta} = \delta\phi\gamma_{\alpha\beta} \qquad \delta_W X = 0 \tag{14.46}$$

となる．これらの変化は非物理的（ゲージ）自由度に属する．一般に，計量の微小変化は

$$\begin{aligned}\delta\gamma_{\alpha\beta} &= \delta_W\gamma_{\alpha\beta} + \delta_D\gamma_{\alpha\beta} + (\text{physical change}) \\ &= \delta\phi\gamma_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\delta v_\beta + \nabla_\beta\delta v_\alpha + \delta t^i\frac{\partial}{\partial t^i}\gamma_{\alpha\beta}(t)\end{aligned} \tag{14.47}$$

で与えられる．最後の項は計量の **Teichmüller 変形**とよばれ，この部分は微分同相でも Weyl スケーリングでも記述することができない．以前述べたように $\{i\}$ は有限集合である；$1 \le i \le n = \dim_{\mathbb{R}}\mathrm{Teich}(\Sigma_g)$．後のために，$\delta\gamma$ を跡がゼロの部分とゼロでない部分に分けると便利である．そこで

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \delta\bar{\phi}\gamma_{\alpha\beta} + (P_1\delta v)_{\alpha\beta} + \delta t^i T_{i\alpha\beta}(t) \tag{14.48}$$

とかこう．

$$T_{i\alpha\beta} \equiv \frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t^i} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\gamma\delta}\frac{\partial\gamma_{\gamma\delta}}{\partial t^i} \tag{14.49}$$

は Teichmüller 変形のなかで跡がゼロの部分である．演算子 P_1 は

$$(P_1\delta v)_{\alpha\beta} \equiv \nabla_\alpha\delta v_\beta + \nabla_\beta\delta v_\alpha - \gamma_{\alpha\beta}(\nabla_\gamma\delta v^\gamma) \tag{14.50}$$

で定義され，$\delta_{\mathrm{D}}\gamma_{\alpha\beta}$ の跡がゼロの部分を取り出す．$\delta\bar{\phi}$ は

$$\delta\bar{\phi} = \delta\phi + \left(\nabla_\gamma\delta v^\gamma + \delta t\frac{\partial\gamma}{\partial t}\text{の跡の部分}\right) \tag{14.51}$$

で定義されるが，括弧の中の具体的な形は必要でない．

埋め込みに関して，商空間 $\mathcal{E}/\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ を考えよう．

任意の埋め込み X は，ある $\tilde{X} \in \mathcal{E}/\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ に $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ を作用させて得られる．すると，埋め込みの微小な変化は

$$\delta X = \delta v^\alpha\partial_\alpha\tilde{X} + \delta\tilde{X} \tag{14.52}$$

と表される．第 1 項は δv によって生成された X の変化，第 2 項は微分同相写像では表せない変化を表す．結局，測度は

$$\mathcal{D}\delta\gamma\mathcal{D}\delta X = J\mathrm{d}^n t\mathcal{D}\delta v\mathcal{D}\delta\phi\mathcal{D}\delta\tilde{X} \tag{14.53}$$

と書かれる．

測度を定義するには，例 14.2 のように，接空間における計量を指定しなければならない．ここでは，計量として超局所計量，すなわち 2 次で $\gamma_{\alpha\beta}$ には依存するが $\partial\gamma_{\alpha\beta}$ にはよらないものに制限しよう．そこで

$$\|\delta h\|_\gamma^2 \equiv \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}(G^{\alpha\beta\gamma\delta} + u\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\gamma\delta})\delta h_{\alpha\beta}\delta h_{\gamma\delta} \tag{14.54a}$$

で，対称な 2 階のテンソルを定義する．ここに $u > 0$ で

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \gamma^{\alpha\gamma}\gamma^{\beta\delta} + \gamma^{\alpha\delta}\gamma^{\beta\gamma} - \gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\gamma\delta} \tag{14.55}$$

である．G は跡がゼロの部分への射影演算子で $(\mathrm{tr}G^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta h_{\gamma\delta} = \gamma_{\alpha\beta}G^{\alpha\beta\gamma\delta}\delta h_{\gamma\delta} = 0)$，$u\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\gamma\delta}$ は跡がゼロでない部分への射影演算子であることを確かめるのは容易である．有限次元の多様体では，計量は自然な体積要素を定義する．しかし現在の場合，測度は具体的に定義されず，Gauss 積分を用いて陰に定義しなければならない (例 14.5 を見よ)．すなわち

$$\int \mathcal{D}\delta h \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta h\|_\gamma^2\right) = 1 \tag{14.56a}$$

同様に，スカラー $\delta\phi$，ベクトル δv，写像 δX^μ に対する計量は

$$\|\delta\phi\|_\gamma^2 = \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\delta\phi^2 \tag{14.54b}$$

$$\|\delta v\|_\gamma^2 = \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\gamma_{\alpha\beta}\delta v^\alpha\delta v^\beta \tag{14.54c}$$

$$\|\delta X\|_\gamma^2 = \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\delta X^\mu\delta X_\mu \tag{14.54d}$$

で定義される．これらの計量により，測度は

$$\int \mathcal{D}\delta\phi \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta\phi\|_\gamma^2\right) = 1 \tag{14.56b}$$

$$\int \mathcal{D}\delta v \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta v\|_\gamma^2\right) = 1 \tag{14.56c}$$

$$\int \mathcal{D}\delta X \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta X\|_\gamma^2\right) = 1 \tag{14.56d}$$

で定義される．

問 14.3 $\|\delta\gamma\|_\gamma^2$ と $\|\delta X\|_\gamma^2$ は，ともに $\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ のもとで不変であるが，$\mathrm{Weyl}(\Sigma_g)$ のもとでは不変でないことを示せ．これは，(14.84) 式で与えれる共形アノマリーの原因となりうる．

次に進む前に $\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ と $\mathrm{Weyl}(\Sigma_g)$ の共通部分を明らかにする必要がある．$\delta v \in \ker P_1$ としよう．すなわち

$$P_1\delta v = \nabla_\alpha\delta v_\beta + \nabla_\beta\delta v_\alpha - \gamma_{\alpha\beta}(\nabla_\gamma\delta v^\gamma) = 0 \tag{14.57}$$

が成り立つとする．このような δv に対して $\delta_D\gamma_{\alpha\beta} = (\nabla_\gamma \delta v^\gamma)\gamma_{\alpha\beta}$ となることが確かめられる．したがって，ベクトル $\delta v \in \ker P_1$ は共形 **Killing** ベクトル (CKV) (§7.7) に他ならない．$\delta\phi$ が $\nabla_\gamma \delta v^\gamma$ のとき δ_{D} と δ_{W} が，計量に同じ変形をもたらすことは重要である．したがって　CKV の集合は $\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ と $\mathrm{Weyl}(\Sigma_g)$ の共通部分と等しい．Σ_g 上に k 個の CKV が存在するとし，それらを Φ^α_s $(1 \le s \le k)$ と表す．Riemann 面の理論によると

$$k = \begin{cases} 6 & g = 0 \\ 2 & g = 1 \\ 0 & g \ge 2 \end{cases} \tag{14.58}$$

であることが知られている．δv を CKV によって生成される部分と，その直交補空間に属する部分 ($\delta\tilde{v}$ とかく) に分け

$$\delta v^\alpha = \delta\tilde{v}^\alpha + \delta a^s \Phi^\alpha_s \tag{14.59}$$

と表す．接ベクトル δX も同様に分解され

$$\delta X = \delta\tilde{X} + \delta\tilde{v}^\alpha \partial_\alpha \tilde{X}^\mu + \delta a^s \Phi^\alpha_s \partial_\alpha \tilde{X}^\mu \tag{14.60}$$

と表される．すると汎関数積分の測度は

$$\mathcal{D}\delta\gamma\mathcal{D}\delta X \to J\mathrm{d}^n\delta t\mathcal{D}\delta\phi\mathcal{D}\delta\tilde{v}\mathrm{d}^k\delta a\mathcal{D}\delta\tilde{X} \tag{14.61}$$

と表すことができる．ここに t および a パラメタは有限次元であることを考慮した．

CKV と直交する $\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ の部分空間を $\mathrm{Diff}_0^\perp(\Sigma_g)$ とする．すると

$$\begin{aligned} V(\mathrm{Diff}_0) &= V(\mathrm{Diff}_0^\perp)\cdot V(\mathrm{CKV}) && (14.63) \\ V(\mathrm{Diff}_0 * \mathrm{Weyl}) &= V(\mathrm{Diff}_0^\perp)V(\mathrm{Weyl}) \\ &= V(\mathrm{Diff}_0)V(\mathrm{Weyl})/V(\mathrm{CKV}) && (14.64) \end{aligned}$$

が得られる．

$\mathcal{M}_g$ の中にスライス $\hat{\gamma}(t)$ をとる．このスライスは n 個の Teichmüller パラメタで表されるものとする．$\hat{\gamma}(t)$ と $G = \mathrm{Diff}_0(\Sigma_g) * \mathrm{Weyl}(\Sigma_g)$ によって結ばれている任意の計量 $\tilde{\gamma}$ は

$$\tilde{\gamma} = f^*(\mathrm{e}^\phi\hat{\gamma}) \qquad f \in \mathrm{Diff}(\Sigma_g),\ \mathrm{e}^\phi \in \mathrm{Weyl}(\Sigma_g) \tag{14.64}$$

と書かれる．$\tilde{\gamma}$ における微小変形 $\delta\tilde{\gamma}$ を $\gamma \equiv \mathrm{e}^\phi\hat{\gamma}$ における微小変形 $\delta\gamma$ の引き戻しとして表す：$\delta\tilde{\gamma} = f^*(\delta\gamma)$．$\delta\gamma$ は $\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ の <u>原点</u> における微小変形であり，したがってベクトル場 δv によって表されることに注意しよう．問 14.3 で示されたように，$\mathrm{Diff}(\Sigma_g)$ は関与するベクトル空間における等長変換である．したがって

$$\|\delta\tilde{\gamma}\|^2_{\tilde{\gamma}} = \|f^*(\delta\gamma)\|^2_{f^*\gamma} = \|\delta\gamma\|^2_\gamma \qquad \gamma = \mathrm{e}^\phi\hat{\gamma} \tag{14.65}$$

が導かれる．点 γ において $\delta\gamma$ を

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \delta\phi\gamma_{\alpha\beta} + (P_1\delta\tilde{v})_{\alpha\beta} + \delta\tau^i T_{i\alpha\beta} \tag{14.66}$$

のように分解する．ここに $\delta\phi$ は Teichmüller 変形の跡がゼロでない部分と $\nabla_\alpha\delta v_\beta + \nabla_\beta\delta v_\alpha$ を含むように再定義されている ((14.51) と比較せよ)．

問 14.4 γ における $T_{i\alpha\beta}$ は $\hat{\gamma}$ における $\hat{T}_{i\alpha\beta}$ と

$$T_{i\alpha\beta} = \mathrm{e}^{\phi}\hat{T}_{i\alpha\beta} \tag{14.67}$$

で結ばれていることを示せ．

これで測度の具体的な形を与える準備ができた．まず，変換 $\mathcal{D}\delta v \to \mathcal{D}\delta\tilde{v}\mathrm{d}^k\delta a$ に付随する Jacobi 行列式を求めよう．等式

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}\delta v \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta v\|_{\gamma}^2\right) \\ &= J\int \mathcal{D}\delta\tilde{v}\mathrm{d}^k\delta a \exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta\tilde{v}\|_{\gamma}^2 - \frac{1}{2}\|\delta a^s\Phi_s\|_{\gamma}^2\right) \\ &= J[\det(\Phi_s, \Phi_r)]^{-1/2} \end{aligned} \tag{14.68a}$$

に注目する．ここに

$$(\Phi_s, \Phi_r) = \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\gamma_{\alpha\beta}\Phi_s^{\alpha}\Phi_r^{\beta} \tag{14.68b}$$

である．[行列要素 (14.68b) は $\gamma = \mathrm{e}^{\phi}\hat{\gamma}$ に対して定義されているが，これは e^{ϕ} に依らないことが示される．これを示すために，計量 $\hat{\gamma}$ に対する CKV $\hat{\Phi}_s^{\alpha}$ をとる；$\hat{\nabla}_{\alpha}\hat{\Phi}_{s\beta} + \hat{\nabla}_{\beta}\hat{\Phi}_{s\alpha} = \hat{\gamma}_{\alpha\beta}\hat{\nabla}_{\gamma}\hat{\Phi}_s^{\gamma}$，ここに $\hat{\nabla}$ は $\hat{\gamma}$ に関する共変微分で $\hat{\Phi}_{s\alpha} \equiv \hat{\gamma}_{\alpha\beta}\hat{\Phi}_s^{\beta}$ である．簡単な計算により $\Phi_{s\alpha} = \gamma_{\alpha\beta}\hat{\Phi}_s^{\beta} = \mathrm{e}^{\phi}\hat{\Phi}_{s\alpha}$ は

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}\Phi_{s\beta} + \nabla_{\beta}\Phi_{s\alpha} &= \mathrm{e}^{\phi}(\hat{\nabla}_{\alpha}\hat{\Phi}_{s\beta} + \hat{\nabla}_{\beta}\hat{\Phi}_{s\alpha} + \hat{\gamma}_{\alpha\beta}\Phi_s^{\gamma}\partial_{\gamma}\phi) \\ &= \mathrm{e}^{\phi}\hat{\gamma}_{\alpha\beta}(\hat{\nabla}_{\gamma}\Phi_s^{\gamma} + \Phi_s^{\gamma}\partial_{\gamma}\phi) = \gamma_{\alpha\beta}\nabla_{\gamma}\Phi_s^{\gamma} \end{aligned}$$

を満たすことが示される．∇ は γ に関する共変微分である．したがって $\Phi_s^{\alpha} = \hat{\Phi}_s^{\alpha}$ は計量 $\gamma = \mathrm{e}\hat{\gamma}$ の CKV であり，CKV は ϕ によらないことが示された．] 式 (14.68a) から

$$\mathcal{D}\delta v = [\det(\Phi_r, \Phi_s)]^{1/2}\mathcal{D}\delta\tilde{v}\mathrm{d}^k\delta a \tag{14.69}$$

が得られる．したがって，残りの変数変換に関する Jacobi 行列をまとめて $\boldsymbol{J}$ とすると，全測度は

$$\boldsymbol{J}[\det(\Phi_r, \Phi_s)]^{1/2}\mathrm{d}^n t\mathcal{D}\delta\phi\mathcal{D}\delta\tilde{v}\mathrm{d}^k\delta a\mathcal{D}\delta\tilde{X} \tag{14.70}$$

と書かれる．

Jacobi 行列式 $\boldsymbol{J}$ は (14.60), (14,66), (14.70) および，測度の定義 (14.56) から求められる．そのために

$$\begin{aligned} 1 &= \int \mathcal{D}\delta\gamma\mathcal{D}\delta X \exp(-\frac{1}{2}\|\delta\gamma\|_{\gamma}^2 - \frac{1}{2}\|\delta X\|_{\gamma}^2) \\ &= \boldsymbol{J}\det{}^{1/2}(\Phi, \Phi)\int \mathrm{d}^n\delta t\mathcal{D}\delta\tilde{v}\mathcal{D}\delta\phi\mathrm{d}^k\delta a\mathcal{D}\delta\tilde{X} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left\|\delta\phi\gamma_{\alpha\beta} + (P_1\delta\tilde{v})_{\alpha\beta} + \delta t^i\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t^i}\right\|^2\right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}\|\delta\tilde{X} + \delta\tilde{v}^{\alpha}\partial_{\alpha}\tilde{X} + \delta a^s\Phi_s^{\alpha}\partial_{\alpha}\tilde{X}\|^2\right] \\ &= \boldsymbol{J}\det{}^{1/2}(\Phi, \Phi)\int \mathrm{d}^n\delta t\mathcal{D}\delta\tilde{v}\ldots\exp\left(-\frac{1}{2}\|MV\|^2\right) \end{aligned} \tag{14.71}$$

と書く．ここに

$$V=\begin{pmatrix}\delta t\\ \delta\phi\\ \delta\tilde{v}\\ \delta a\\ \delta\tilde{X}\end{pmatrix}\qquad M=\left(\begin{array}{ccc|cc}\partial\gamma/\partial t & \gamma & P_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \partial\tilde{X} & \Phi\cdot\partial\tilde{X} & 1\end{array}\right)\equiv\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}\tag{14.72}$$

である．(14.71) 式の指数に表れる行列は

$$\begin{aligned}M^\dagger M &= \begin{pmatrix}A^\dagger & C^\dagger\\ 0 & B^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ C & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^\dagger A+C^\dagger C & C^\dagger B\\ B^\dagger C & B^\dagger B\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}I & *\\ 0 & B^\dagger B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^\dagger A & 0\\ ** & I\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{14.73}$$

と書かれる．ここに $*$ や $**$ の部分の具体的な形は必要ない．最後の式は，恒等式

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & B\\ 0 & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A-BD^{-1}C & 0\\ D^{-1}C & I\end{pmatrix}$$

から得られた．(14.71) の Gauss 積分は直ちに求められて

$$\begin{aligned}1 &= \boldsymbol{J}\mathrm{det}^{1/2}(\Phi,\Phi)\mathrm{det}^{-1/2}(M^\dagger M)\\ &= \boldsymbol{J}\mathrm{det}^{1/2}(\Phi,\Phi)[\det(A^\dagger A)\det(B^\dagger B)]^{-1/2}\end{aligned}\tag{14.74}$$

となる．

$\mathrm{det}^{1/2}(A^\dagger A)$ を計算するためには $\|\delta\gamma\|_\gamma^2$ を求めなくてはならない．これは

$$\begin{aligned}\|\delta\gamma\|_\gamma^2 &= \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}(G^{\alpha\beta\gamma\delta}+u\gamma^{\alpha\beta}\gamma^{\gamma\delta})\\ &\quad\times[\delta\phi\gamma_{\alpha\beta}+(P_1\delta\tilde{v})_{\alpha\beta}+\delta t^iT_{i\alpha\beta}][\delta\phi\gamma_{\gamma\delta}+(P_1\delta\tilde{v})_{\gamma\delta}+\delta t^jT_{j\gamma\delta}]\\ &= 4u\|\delta\phi\|_\gamma^2+\|P_1\delta\tilde{v}\|^2+\delta t^i\delta t^j(T_i,T_j)+2\delta t^i(P_1\delta\tilde{v},T_i)\end{aligned}\tag{14.75}$$

となる．一般に T_i は $P_1\delta v$ とは直交していない．T_i を $P_1\delta v$ と直交する部分と $P_1\delta v$ に平行な部分に分けるには，P_1 の随伴演算子 $P_1^\dagger$ を定義しなければならない．P_1 はベクトル場を跡がゼロである対称テンソル場へ写像する楕円型演算子である．したがって $P_1^\dagger$ は跡がゼロの対称テンソル場をベクトル場へ写像する．跡がゼロの対称テンソル場を δh とすると

$$\begin{aligned}(P_1\delta v,\delta h) &= \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}G^{\alpha\beta\gamma\delta}(P_1\delta v)_{\alpha\beta}\delta h_{\gamma\delta}\\ &= \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}(\nabla^\alpha\delta v^\beta+\nabla^\beta\delta v^\alpha)\delta h_{\alpha\beta}\\ &= \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\delta v^\alpha(-2\nabla^\beta)\delta h_{\alpha\beta}\equiv(\delta v,P_1^\dagger\delta h)\end{aligned}$$

が成り立つ．最後の行の内積は (14.54c) で与えられている．これから

$$(P_1^\dagger\delta h)_\alpha=-2\nabla^\beta\delta h_{\alpha\beta}\tag{14.76}$$

が導かれる．δh が $P_1\delta v$ と直交するとしよう．上で得られた事実から $(P_1\delta v, \delta h) = (\delta v, P_1^\dagger \delta h) = 0$ となる．δv は任意であるから δh は $\ker P_1^\dagger$ の元となる (図 14.4 を見よ)．T_i は

$$T_i = \mathcal{P}_0 T_i + \mathcal{P}_\perp T_i \tag{14.77a}$$

と分離される．ここに，射影演算子 $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_\perp$ は

$$\mathcal{P}_0 \equiv 1 - P_1 \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger \qquad \mathcal{P}_\perp \equiv P_1 \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger \tag{14.77b}$$

で定義される．$\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_\perp = 1, \mathcal{P}_0\mathcal{P}_\perp = 0, P_1^\dagger \mathcal{P}_0 = 0, P_1^\dagger \mathcal{P}_\perp = P_1^\dagger$，また $T_i \in \ker P_1^\dagger$ に対して $\mathcal{P}_0 T_i = T_i, \mathcal{P}_\perp T_i = 0$ などを確かめることは易しい．したがって (14.77a) は T_i の直交分解である．$\mathcal{P}_\perp T_i = P_1 u_i$ と書こう．ここに

$$u_i = \frac{1}{P_1^\dagger P_1} P_1^\dagger T_i$$

である．$\{\psi_r\}$ $(1 \le r \le n)$ を $\ker P_1^\dagger$ の，必ずしも正規直交系とは限らない実基底とする．すると T_i は

$$T_i = \sum_r \psi_r Q_{ri} + P_1 u_i \tag{14.78}$$

と展開される (図 14.5 を見よ)．T_i と ψ_r の内積をとると

$$Q_{ri} = \sum_s [(\psi, \psi)^{-1}]_{rs} (\psi_s, T_i) \tag{14.79}$$

が得られる．結局 $\delta\gamma$ は

$$\delta\gamma = \delta\phi\gamma + P_1(\delta\tilde{v} + \delta t^i u_i) + \delta t^i \psi_r Q_{ri} \tag{14.80a}$$

と，互いに直交する成分に分解された．それに応じて，計量の変形の空間 $\{\delta\gamma\}$ は

$$\{\delta\gamma\} = \{\mathrm{conf}\} \oplus \{\mathrm{image} P_1\} \oplus \{\ker P_1^\dagger\} \tag{14.80b}$$

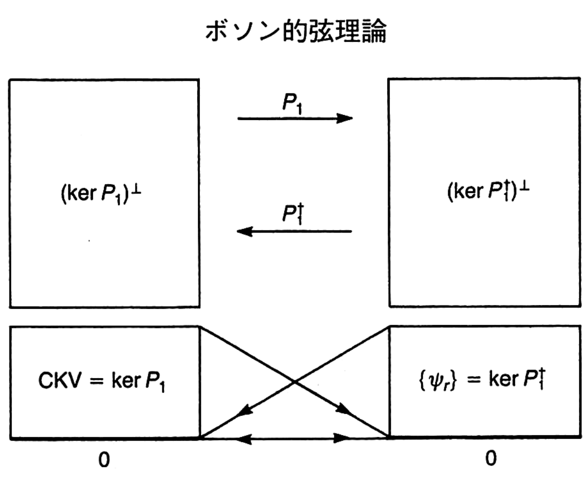


図 **14.4.** 演算子 P_1 と，その随伴演算子 $P_1^\dagger$．

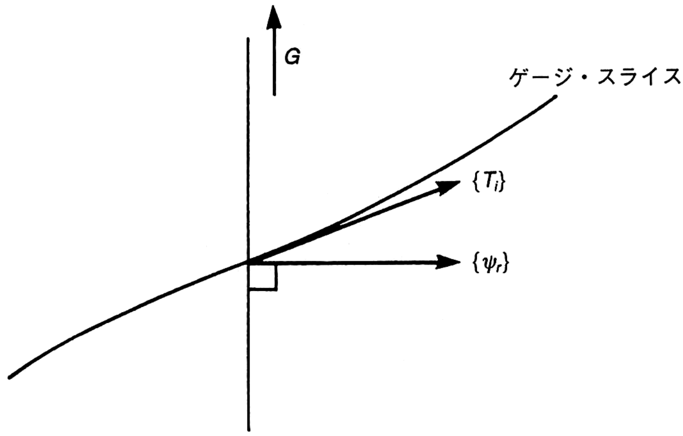


図 14.5. $\{T_i\}$ はゲージ・スライスに接する変形の基底，$\{\psi_r\}$ は $\ker P_1^\dagger$ の基底である．

と直和分解される．

(14.80a) を (14.75) に代入すると

$$\begin{aligned}\|\delta\gamma\|^2 &= 4u\|\delta\phi\|^2 + \|P_1\delta\bar{v}\|^2 \\ &+\delta t^i\delta t^j (T_i,\psi_r)_\gamma[(\psi,\psi)_\gamma^{-1}]_{rs}(\psi_s,T_j)_\gamma \end{aligned} \tag{14.81}$$

が得られる．ここに $\delta\bar{v} \equiv \delta\tilde{v} + \delta t^i u_i$ で，最後の項の逆行列は，行列 $(a_{rs}) = ((\psi_r,\psi_s))$ の逆を意味する．$\mathcal{V}_1^t = (\delta t, \delta\phi, \delta\bar{v})$ とおくと

$$\begin{aligned}\det{}^{-1/2}(A^\dagger A) &= \int \mathrm{d}^n\delta t\mathcal{D}\delta\phi\mathcal{D}\delta\bar{v}\exp(-\frac{1}{2}\mathcal{V}_1^t A^\dagger A\mathcal{V}_1) \\ &= \int \mathcal{D}\delta\phi\exp(-2u\|\delta\phi\|^2)\int\mathcal{D}\delta\bar{v}\exp(-\frac{1}{2}\|P_1\bar{v}\|^2) \\ &\quad\times\int \mathrm{d}^n\delta t\exp\{-\frac{1}{2}\delta t^i(T_i,\psi_r)[(\psi,\psi)^{-1}]_{rs}(\psi_s,T_i)\delta t^j\} \\ &\quad\propto(\det P_1^\dagger P_1)^{-1/2}\left(\frac{\det(T,\psi)^2}{\det(\psi,\psi)}\right)^{-1/2}\end{aligned} \tag{14.82}$$

が得られた．

(14.71) と (14.82) の結果から

$$1 = \boldsymbol{J}\ \det{}^{1/2}(\Phi,\Phi)\det{}^{-1/2}B^\dagger B(\det P_1^\dagger P_1)^{-1/2}\left(\frac{\det(T,\psi)^2}{\det(\psi,\psi)}\right)^{-1/2}$$

が得られる．すると g-ループの分配関数は

$$\begin{aligned}Z_g &= \int\frac{\mathrm{d}^n t\mathcal{D}\bar{v}\mathcal{D}\phi\mathcal{D}\tilde{X}}{V(\mathrm{Diff}*\mathrm{Weyl})}\det{}^{1/2}B^\dagger B\det{}^{-1/2}(\Phi,\Phi) \\ &\quad\times\left(\det P_1^\dagger P_1\frac{\det(T,\psi)^2}{\det(\psi,\psi)}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-S}\end{aligned} \tag{14.83}$$

で与えられる．変数 a (CKV) に関する積分は，ϕ 積分に既に含まれているので省いた．ナイーブには $\bar{v}$ に関する積分は $V(\mathrm{Diff}_0^\perp)$ となり，ϕ に関する積分は $V(\mathrm{Weyl})$ を与えるよ

うに思われる．しかし，問 14.3 が示すように，測度 $\mathcal{D}X$ も $\mathcal{D}\gamma$ も共形因子に依存する．Polyakov (1981) は，共形変換 $\gamma \to e^{2\phi}\gamma$ のもとで，測度は

$$\mathcal{D}X \to \exp\left(\frac{D}{24\pi^2}\int d^2\xi\sqrt{\gamma}(\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \mathcal{R}\phi)\right)\mathcal{D}X \tag{14.84a}$$

$$\mathcal{D}\gamma \to \exp\left(\frac{-26}{24\pi^2}\int d^2\xi\sqrt{\gamma}(\gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \mathcal{R}\phi)\right)\mathcal{D}\gamma \tag{14.84b}$$

と変換することを示した．したがって，測度 $\mathcal{D}X\mathcal{D}\gamma$ は，次元が $D = 26$ のときに限り共形不変となる．この数 26 は**臨界次元**とよばれる．以下，我々は常に $D = 26$ とおくことにする[1]．すると (14.83) は

$$\begin{aligned} Z_g &= \frac{1}{|\mathrm{MCG}|}\int d^n t\mathcal{D}\tilde{X}\det{}^{1/2}B^\dagger B\det{}^{-1/2}(\Phi,\Phi) \\ &\quad\times\left(\det P_1^\dagger P_1\frac{\det(T,\psi)^2}{\det(\psi,\psi)}\right)^{1/2} e^{-S} \end{aligned} \tag{14.85}$$

と簡単になる．

$\det^{1/2}B^\dagger B$ を消すために X 積分を実行しよう．

$$\begin{aligned} 1 &= \int\mathcal{D}\delta X\exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta X\|^2\right) \\ &= J\int\mathcal{D}\delta\tilde{X}d^k\delta a\exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta\tilde{X} + \delta a^s\Phi_s^\alpha\partial_\alpha\tilde{X}\|^2\right) \\ &= J\int\mathcal{D}\delta\tilde{X}\exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta\tilde{X}\|^2\right)\int d^k\delta a\exp\left(-\frac{1}{2}\|\delta a^s\Phi_s^\alpha\partial_\alpha\tilde{X}\|^2\right) \\ &= J\det{}^{-1/2}(B^\dagger B) \end{aligned}$$

から $\det^{1/2}(B^\dagger B)$ は，変換 $X \to (\tilde{X}, a)$ における Jacobi 行列式であることが示される．すると

$$\int\mathcal{D}\tilde{X}\det{}^{1/2}B^\dagger Be^{-S} = \int\frac{\mathcal{D}X}{V(\mathrm{CKV})}e^{-S} \tag{14.86}$$

が得られる．ここに $V(\mathrm{CKV}) = \int d^k a$ は CKV の体積である．

X に関する積分は直ちに実行できる．

$$\int_{\mathcal{E}}\mathcal{D}Xe^{-S} = \int_{\mathcal{E}}\mathcal{D}X\exp\left[-\frac{1}{2}(X,\Delta X)\right] \tag{14.87a}$$

と書こう．ここに

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\alpha\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta \tag{14.87b}$$

は 0-形式に作用するラプラシアンである ((7.188) を見よ)．経路積分 (14.87a) の具体的な形を求めよう．ψ_n を Δ の固有関数としよう；

$$\Delta\psi_n = \lambda_n\psi_n \qquad \lambda_n \in [0,\infty) \tag{14.88}$$

[1] $D = 26$ 以外では，古典的作用がもっている共形不変性は損なわれる．

固有関数 $\{\psi_n\}$ は

$$(\psi_n, \psi_m) = \int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}\psi_n\psi_m = \delta_{nm}$$

と規格化されているものとする．Δ は正定値であるから λ は非負である．X^μ を ψ_n で

$$X^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\mu \psi_n = X_0^\mu X'^\mu \qquad a_n^\mu \in \mathbb{R} \tag{14.89}$$

と展開しよう．ここに $X_0^\mu = a_0^\mu\psi_0$ は Δ の，固有値ゼロの固有関数で，X'^μ はそれ以外の自由度を表す．それに応じて，経路積分 (14.87a) は

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}X \exp\left[\frac{1}{2}(X, \Delta X)\right] &= \int \prod_{n,\mu} \mathrm{d}a_n^\mu \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\lambda_n(a_n^\mu)^2\right) \\ &= \int \prod_{\mu} \mathrm{d}a_0^\mu \int \prod_{n\neq 0}\prod_{\mu} \mathrm{d}a_n^\mu \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\lambda_n(a_n^\mu)^2\right) \\ &= \left(\int \prod_{\mu} \mathrm{d}a_0^\mu\right)(\det{}'\Delta)^{-13} \end{aligned} \tag{14.90}$$

と書くことができる．ここに det$'$ のプライムはゼロ固有値が含まれていないことを意味する．ゼロ・モードに関して積分するために，規格化された固有ベクトル ψ_0 は

$$\psi_0 = \left(\frac{1}{\int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}}\right)^{1/2} \tag{14.91}$$

で与えられることに注意しよう．[ψ_0 は $\Delta\psi_0 = 0$ を満たすので，調和関数である．Riemann 面上の任意の調和関数は最大値の原理により定数でなければならない．] $X_0^\mu = a_0^\mu\psi_0$ より

$$\int \prod_{\mu} \mathrm{d}a_0^\mu = \int \prod_{\mu} \mathrm{d}X_0^\mu (\psi_0)^{-26} = V\left(\frac{1}{\int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}}\right)^{-13} \tag{14.92}$$

が得られる．ここに $V = \int \prod \mathrm{d}X_0^\mu$ は時空の体積である．(14.90) と (14.92) の結果から

$$\int \mathcal{D}X \mathrm{e}^{-S} = \left(\frac{\det{}'\Delta}{\int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}}\right)^{-13} \tag{14.93}$$

が得られる．ただし V とその他の重要でない定数を省略した．

結局 g-ループ分配関数は

$$\begin{aligned} Z_g &= \int_{\mathrm{Mod}} \frac{\mathrm{d}^n t}{V(\mathrm{CKV})} \frac{\det(T, \psi)}{\det^{1/2}(\psi, \psi)\det^{1/2}(\Phi, \Phi)} \\ &\quad \times [\det{}' P_1^\dagger P_1]^{1/2}\left(\frac{\det{}'\Delta}{\int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}}\right)^{-13} \end{aligned} \tag{14.94}$$

と求められた．ここに

$$\frac{1}{|\mathrm{MCG}|}\int_{\mathrm{Teich}} \mathrm{d}^n t = \int_{\mathrm{Mod}} \mathrm{d}^n t \tag{14.95}$$

を用いた．$g \geq 2$ のときは，Riemann 面は CKV をもたないので，(14.95) は

$$Z_g = \int_{\mathrm{Mod}} \mathrm{d}^n t \frac{\det(T, \psi)}{\det^{1/2}(\psi, \psi)} (\det P_1^\dagger P_1)^{1/2} \left(\frac{\det{}'\Delta}{\int \mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}}\right)^{-13} \tag{14.96}$$

と簡単になる．

14.2.3 複素テンソル解析と弦測度

どんな Riemann 面も複素構造をもつので，弦の振幅を計算する上でこの事実を利用することができる．弦理論における多くの美しい側面は，複素構造が考慮されたときにのみ，その姿を現す．ここでは，複素微分幾何学の言葉を用いて，分配関数を書きなおそう．

まず最初に，等温座標系

$$\gamma = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\sigma}[\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar{z} + \mathrm{d}\bar{z} \otimes \mathrm{d}z]$$

を選んで $\mathcal{M}_g$ におけるゲージを固定する．計量の成分は $\gamma_{z\bar{z}} = \gamma_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}\exp 2\sigma$ となる．[実際，この選択をもってしてもゲージは一意的には決まらない．以下で，一意化定理を用いてゲージを完全に固定する．] δv によって生成された微分同相写像のもとでの γ の変形は ((14.45) を参照)

$$\begin{aligned} \delta_D\gamma_{zz} &= 2\nabla_z^{(-1)}\delta v_z \\ \delta_D\gamma_{z\bar{z}} &= \nabla_z\delta v_{\bar{z}} + \nabla_{\bar{z}}\delta v_z = \gamma_{\bar{z}z}(\nabla_z^{(1)}\delta v^z + \nabla^z_{(-1)}\delta v_z) \end{aligned} \tag{14.97}$$

で与えられる．同様に，無限小共形変換によって生成された $\delta_{\mathrm{W}}\gamma$ は ((14.46) を見よ)

$$\delta_W\gamma_{z\bar{z}} = \delta\phi\gamma_{z\bar{z}} \qquad \delta_W\gamma_{zz} = 0 \tag{14.98}$$

で与えられる．

演算子 P_1 のベクトルに対する作用を見るために，$\delta v^z \in \mathcal{T}^1$ と $\delta v_z \in \mathcal{T}^{-1}$ をとる．すると，(14.50) から

$$(P_1\delta v)^{zz} = 2\nabla^z_{(1)}\delta v^z \in \mathcal{T}^2 \tag{14.99a}$$

$$(P_1\delta v)_{zz} = 2\nabla_z^{(-1)}\delta v_z \in \mathcal{T}^{-2} \tag{14.99b}$$

が得られる．これから P_1 は，写像

$$P_1 = \begin{pmatrix} \nabla^z_{(1)} & 0 \\ 0 & \nabla_z^{(-1)} \end{pmatrix} : \mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^{-1} \to \mathcal{T}^2 \oplus \mathcal{T}^{-2} \tag{14.100}$$

であることがわかる．同様に $P_1^\dagger$ は，跡がゼロの対称テンソルをベクトルへ写像する．$\delta h^{zz} \in \mathcal{T}^2$ と $\delta h_{zz} \in \mathcal{T}^{-2}$ に対し

$$(P_1^\dagger\delta h)^z = \nabla_z^{(2)}\delta h^{zz} \in \mathcal{T}^1 \tag{14.101a}$$

$$(P_1^\dagger\delta h)_z = \nabla^z_{(-2)}\delta h_{zz} \in \mathcal{T}^{-1} \tag{14.101b}$$

が得られる．したがって $P_1^\dagger$ は写像

$$P_1^\dagger = \begin{pmatrix} \nabla_z^{(2)} & 0 \\ 0 & \nabla^z_{(-2)} \end{pmatrix} : \mathcal{T}^2 \oplus \mathcal{T}^{-2} \to \mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^{-1} \tag{14.102}$$

であることがわかる．これらの積は，写像

$$P_1^\dagger P_1 = \begin{pmatrix} \nabla_z^{(2)}\nabla^z_{(1)} & 0 \\ 0 & \nabla^z_{(-2)}\nabla_z^{(-1)} \end{pmatrix} : \mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^{-1} \to \mathcal{T}^1 \oplus \mathcal{T}^{-1} \tag{14.103}$$

である．したがって，$\Delta^{\pm}_{(n)}$ をラプラシアンとすると，(14.96) の行列式は

$$
\begin{aligned}
(\det{}' P_1^\dagger P_1)^{1/2} &= (\det{}'\nabla_z^{(2)}\nabla^z_{(1)}\det{}'\nabla^z_{(-2)}\nabla_z^{(-1)})^{1/2} \\
&= (\det{}'\Delta^+_{(1)}\Delta^-_{(-1)})^{1/2}
\end{aligned}
\tag{14.104}
$$

となる．$\Delta^+_{(1)}$ と $\Delta^-_{(-1)}$ は同じ固有値をもつことを示そう．$\Delta^+_{(1)}$ の固有ベクトルの一つを δv^z とする；

$$
\Delta^+_{(1)}\delta v^z = -2\mathrm{e}^{-4\sigma}\partial_z \mathrm{e}^{2\sigma}\partial_{\bar z}\delta v^z = \lambda\delta v^z
\tag{14.105}
$$

ここに (14.21a) を用いた．固有値 λ は非負の実数である ($\Delta^{\pm}_{(n)}$ は非負の Hermite 演算子であることに注意)．したがって

$$
\begin{aligned}
\Delta^-_{(-1)}(\gamma_{z\bar z}\overline{\delta v^z}) &= -\mathrm{e}^{-2\sigma}\partial_{\bar z}\mathrm{e}^{2\sigma}\partial_z\overline{\delta v^z} = -\mathrm{e}^{-2\sigma}\overline{\partial_z \mathrm{e}^{2\sigma}\partial_{\bar z}\delta v^z} \\
&= -\gamma_{z\bar z}2\mathrm{e}^{-4\sigma}\overline{\partial_z \mathrm{e}^{2\sigma}\partial_{\bar z}\delta v^z} = \lambda\gamma_{z\bar z}\overline{\delta v^z}
\end{aligned}
\tag{14.106}
$$

となり，これから $\gamma_{z\bar z}\overline{\delta v^z}$ は $\Delta^-_{(-1)}$ の固有関数で，同じ固有値 λ をもつことが示された．問 14.5 により，この逆が成り立つことも容易に示される．したがって $\Delta^+_{(1)}$ と $\Delta^-_{(-1)}$ は同一の固有値をもち $\det{}'\Delta^+_{(1)} = \det{}'\Delta^-_{(-1)}$ が成り立つ．これから (14.104) は

$$
(\det{}' P_1^\dagger P_1)^{1/2} = \det{}'\Delta^-_{(-1)} = \det{}'\Delta^+_{(1)}
\tag{14.107}
$$

となる．

問 14.5 δv_z を $\Delta^-_{(-1)}$ の固有ベクトルとし，その固有値を λ とする．このとき $\gamma^{z\bar z}\overline{\delta v_z}$ は $\Delta^+_{(1)}$ の固有関数で，その固有値は λ となることを示せ．

計量の物理的な変化は Teichmüller 変形 $\delta\tau^i\mu_i$ である．ただし τ^i (μ_i) は t^i (T_i) の複素多様体版である．我々は経験から，Teichmüller 変形で重要な部分は，実基底を用いると対称で跡がゼロの部分であることを知っている．複素基底では，これらの条件は

$$
\delta\gamma_{zz} = \nabla_z^{(-1)}\delta\tilde v_z + \delta\tau^i\mu_{izz}
\tag{14.108a}
$$

$$
\delta\gamma_{z\bar z} = \delta\phi\gamma_{z\bar z}
\tag{14.108b}
$$

で与えられる．ただし，$\delta\phi$ は，δv による $\delta\gamma_{z\bar z}$ の変化を含むように再定義されている ($\delta_{\mathrm D}\gamma_{z\bar z} \propto \gamma_{z\bar z}$ に注意)．(14.108a) において，$\delta\tilde v$ は CKV を含まない，すなわち $\delta\tilde v \in (\ker\nabla_z^{(-1)})^\perp$ である．

$\{\delta\gamma\}$ の直交分解を行うためには，様々な空間における内積を定義しなければならない．最も自然な定義は

$$
\|\delta\gamma_{zz}\|^2 = \int \mathrm{d}^2 z\sqrt{\gamma}\overline{\delta\gamma_{zz}}\delta\gamma^{zz}
\tag{14.109a}
$$

$$
\|\delta\gamma_{z\bar z}\|^2 = \int \mathrm{d}^2 z\sqrt{\gamma}\overline{\delta\gamma_{z\bar z}}\delta\gamma^{z\bar z}
\tag{14.109b}
$$

$$
\|\delta v_z\|^2 = \int \mathrm{d}^2 z\sqrt{\gamma}\gamma_{z\bar z}\overline{\delta v^z}\delta v^z
\tag{14.109c}
$$

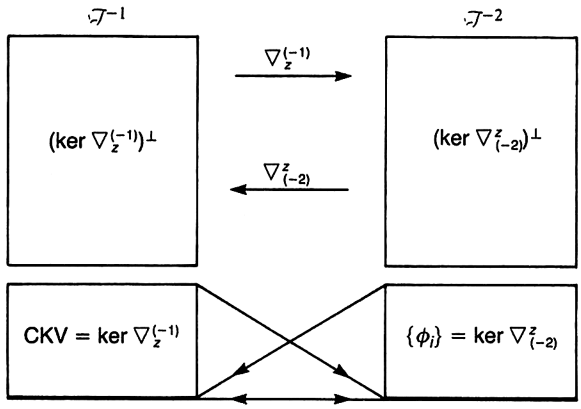


図 **14.6.** 演算子 $\nabla_z^{(-1)}$ と，その随伴演算子 $\nabla^z_{(-2)}$.

であろう．[$\delta\gamma_{zz}\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$ と $\delta_{z\bar z}\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}\bar z$ は，異なるテンソルであるので，内積は独立に定義しなければならない．]

§14.2.2 における議論にしたがって，直交分解

$$\delta\gamma_{zz} = \nabla_z^{(-1)}\delta\tilde v_z + \delta\tau^i\mu_{izz} = \nabla_z^{(-1)}\delta\bar v_z + \delta\tau^i\phi_{izz} \tag{14.110}$$

を導入する．ここに $\delta\bar v = \delta\tilde v + (\delta\tau^i\mu_{izz}$の $\{\nabla_z^{(-1)}$の像 $\}$ への射影) である．$\nabla_z^{(-1)}\delta\bar v_z$ と ϕ_{izz} の直交性から

$$0 = (\nabla_z^{(-1)}\delta v_z, \phi_{izz}) = \int \mathrm{d}^2z\sqrt{\gamma}\overline{\delta v_z}(-\nabla^z_{(-2)}\phi_{izz})$$

が導かれる．ここに $\nabla_z^{(-1)\dagger} = -\nabla^z_{(-2)}$ を用いた．したがって

$$\phi_{izz} \in \ker \nabla^z_{(-2)} \tag{14.111}$$

が示された (図 14.6 を見よ)．$\nabla^z_{(-2)}$ の具体的な形を使うと $\partial_{\bar z}\phi_{izz} = 0$，すなわち $\ker\nabla^z_{(-2)}$ はヘリシティ -2 の正則テンソルの集合であることが示される．テンソル $\phi_i = \phi_{izz}\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$ は **2 次微分**とよばれ，$\mu_i = \mu_{izz}\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}z$ は **Beltrami 微分**とよばれる (図 14.7 を見よ)．実際の計算では，以下に見るように Beltrami 微分によってゲージ・スライスを指定したほうが便利である場合が多い．このようにして

$$\{\ker P_1^\dagger\} = \{2\text{ 次微分 }\} = \{\ker \nabla^z_{(-2)}\} \tag{14.112}$$

Riemann-Roch の定理 (14.27) は

$$\dim_{\mathbb{C}}\ker\nabla_z^{(-1)} - \dim_{\mathbb{C}}\ker\nabla^z_{(-2)} = 3 - 3g \tag{14.113}$$

という形をとる．

さて，我々は $\{\delta\gamma\}$ を，互いに直交する成分

$$\{\delta\gamma\} = \{\text{ 共形部分 }\} \oplus \{\nabla_z^{(-1)}\text{ の像 }\} \oplus \{\ker\nabla^z_{(-2)}\} + \text{複素共役} \tag{14.114}$$

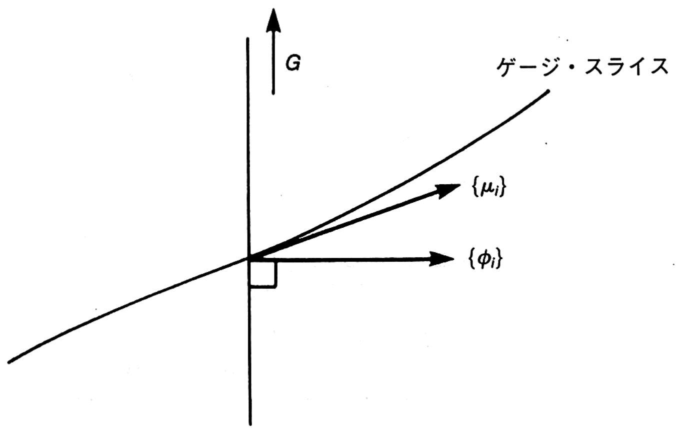


図 **14.7.** Beltrami 微分 $\{\mu_i\}$ はゲージ・スライスに接する方向の変形を張り，$\{\phi_i\}$ は $\ker\nabla^z_{(-2)}$ を張る．

に分けた．(これを (14.80b) と比べよ．) これに対応して，測度は

$$\mathcal{D}\delta\gamma\mathcal{D}\delta X \to J\mathrm{d}^n\delta\tau\mathcal{D}\delta\bar{v}\mathcal{D}\delta\phi\mathcal{D}\delta\tilde{X}\mathrm{d}^k\delta a \tag{14.115}$$

となる．ここに，Teichmüller 空間と CKV の空間の複素次元を，それぞれ n と k と置いた．§14.2.2 の議論を繰り返すと Jacobi 行列式が求められ，

$$\begin{aligned} Z_g &= \int \mathcal{D}\gamma\mathcal{D}X \frac{1}{V(\mathrm{Diff}^*\mathrm{Weyl})}\mathrm{e}^{-S} \\ &= \int_{\mathrm{Mod}} \mathrm{d}^n\tau\mathcal{D}X \frac{\det'\Delta^+_{(1)}}{V(\mathrm{CKV})}\frac{|\det(\mu,\phi)|^2}{\det(\phi,\phi)\det(\Phi,\Phi)}\mathrm{e}^{-S} \end{aligned} \tag{14.116}$$

我々は，複素変数について積分しているので，(14.96) 式に現れる冪 1/2 は (14.116) 式には現れない．X 積分を実行すると

$$\begin{aligned} Z_g &= \int_{\mathrm{Mod}} \frac{\mathrm{d}^n\tau}{V(\mathrm{CKV})}\frac{|\det(\mu,\phi)|^2}{\det(\phi,\phi)\det(\Phi,\Phi)} \\ &\quad \times\det'\Delta^+_{(1)}\left(\frac{\det'\Delta}{\int \mathrm{d}^2z\sqrt{\gamma}}\right)^{-13} \end{aligned} \tag{14.117}$$

となる．

14.2.4 Riemann 面のモジュライ空間

空間 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ と $\mathrm{Teich}(\Sigma_g)$ は

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_g) \equiv \mathcal{M}_g/\mathrm{Diff}(\Sigma_g) \qquad \mathrm{Teich}(\Sigma_g) \equiv \mathcal{M}_g/\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$$

と定義された．これらは $\mathrm{MCG} \equiv \mathrm{Diff}(\Sigma_g)/\mathrm{Diff}_0(\Sigma_g)$ により，

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_g) = \mathrm{Teich}(\Sigma_g)/\mathrm{MCG}$$

と関係づけられる．ここで，これらをもう少し詳しく調べよう．まず

g	$\dim_{\mathbb{C}}$ CKV	CKV	$\dim_{\mathbb{C}}$ Teich(Σ_g)	MCG
0	3	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$	0	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$
1	1	$\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(1)$	1	$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$
$g\geq 2$	0	空	$3g-3$	?

(14.118)

が成り立つ事に注意しよう．[注：$g\geq 2$ の場合の MCG は $3g-1$ 個の Dehn のひねりで表される．しかし，この $3g-1$ 個は極小個数ではない．] (14.118) より，$g=0$ のときは Teichmüller 空間は 1 点で，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は無限の体積をもつので $Z_0=0$ が得られる．[もちろん，これは頂点作用素を含む $g=0$ の振幅までゼロになると主張しているわけではない．] 一般に $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ はトポロジカルに自明でないが，$\mathrm{Teich}(\Sigma_g)$ は自明である．$\mathrm{Teich}(\Sigma_g)$ は $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ の普遍被覆空間で，$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ がトポロジカルに自明でないのは MCG による．

実際の計算において，一意化定理は大変有用である．§14.2.2 において，まず Beltrami 微分 μ_i を選び，次に基底を $\phi_i\in\ker P_1^\dagger$ に変えた．最初の μ_i を選んだのは，次の一意化定理があるからである．

定理 14.2 (一意化定理) Σ_g を種数 g のトーラスとする．すると Σ_g は，以下に与えられる定曲率の Riemann 面と共形である；

g	Riemann 面	計量	$\mathrm{sign}\mathcal{R}$
0	$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$	$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}\bar{z}/(1+z\bar{z})^2$	$+$
1	$\mathbb{C}/\mathrm{L}$	$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}\bar{z}$	0
$g\geq 2$	H/G	$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}z\otimes\mathrm{d}\bar{z}/(\mathrm{Im}z)^2$	$-$

(14.119)

ここに，L は $\mathbb{C}$ の格子である (例 8.2 を見よ)．H は上半平面で $G\subset\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ は **Fuchs 群**とよばれる．$g\geq 2$ の計量は **Poincaré 計量**とよばれる．

この定理の証明は，例えば Farkas and Kra (1980) に与えられている．この定理のおかげで $\mathcal{M}_g$ のゲージ・スライスを構成するとき，常に定曲率の計量をとることができる．これは特別の Beltrami 微分 μ_i を選ぶことに対応している．このゲージ・スライスは **Weil-Petersson 測度**

$$\int \mathrm{d}^n\tau \frac{|\det(\mu,\phi)|^2}{\det(\phi,\phi)} = \int \mathrm{d}(\text{Weil-Petersson}) \tag{14.120}$$

を定義する (D'Hoker and Phong (1986) を見よ)．

問 14.6 (14.119) に与えられた計量のスカラー曲率を計算せよ．結果は z にも $\bar{z}$ にも独立であることを確かめよ．

14.3 1-ループ振幅

前節で紹介した解析の例として，閉じた向き付け可能なボソン弦理論の 1-ループ真空振幅を計算しよう．$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Teich}(\Sigma_1)=1$ および $\dim_{\mathbb{C}}\ker\nabla_z^{(-1)}=1$ より

$$Z_1=\int_{\mathrm{Mod}}\frac{\mathrm{d}\tau}{V(\mathrm{CKV})}\frac{|(\mu,\phi)|^2}{(\phi,\phi)\cdot(\Phi,\Phi)}\det{}'\Delta^+_{(1)}\left(\frac{\det{}'\Delta}{\int\mathrm{d}^2\xi\sqrt{\gamma}}\right)^{-13} \tag{14.121}$$

が得られる．(14.121) を求めるには，いくつかのステップが必要である．

14.3.1 モジュライ空間，CKV，Beltrami 微分と 2 次微分

例 8.2 において，トーラスの複素構造，すなわち共形構造，は複素パラメタ τ ($\mathrm{Im}\tau > 0$) で指定されることを示した．図 8.3 はモジュライ空間

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_g) = \mathcal{M}_1/G = \mathrm{Teich}(\Sigma_g)/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = H/\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

を図示したものである．

Teichmüller パラメタ $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ ($\tau_2 > 0$) で指定されるトーラス T_τ をとる．その代表元として，図 14.8 のトーラスをとる．$\mathbb{C}$ における計量は，(一意化定理が保証するように) 平坦な計量

$$\gamma = \frac{1}{2}[\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar{z} + \mathrm{d}\bar{z} \otimes \mathrm{d}z] \tag{14.122}$$

を自然に与える．CKV は大域的に定義された正則ベクトル場である．CKV の規格化された基底として $\Phi = \alpha\partial/\partial z$ をとる．条件 $(\Phi, \Phi) = 1$ から $\int \mathrm{d}^2|\alpha|^2 = \tau_2|\alpha|^2 = 1$，すなわち $\alpha = \tau_2^{-1/2}$ が得られる (位相因子は落とした)．Φ は複素平面における並進

$$z \to z' = z + \tau_2^{-1/2}(v^1 + \mathrm{i}v^2) \tag{14.123}$$

を引き起こす．しかし，並進は格子の分のあいまいさがあることに注意されたい；$\tau_2^{-1/2}(v^1 + \mathrm{i}v^2)$ と $\tau_2^{-1/2}(v^1 + \mathrm{i}v^2) + (m + \tau n)$ は同じ並進を与える．したがって $\tau_2^{-1/2}(v_1 + \mathrm{i}v^2)$ は，図 14.8 の平行四辺形の中に制限されなければならない．

$$\tau_2 = \int \mathrm{d}^2 z = \tau_2^{-1} \int \mathrm{d}^2 v$$

であるから $V(\mathrm{CKV})$ は

$$V(\mathrm{CKV}) = \int \mathrm{d}^2 v = \tau_2^2 \tag{14.124}$$

であることがわかる．

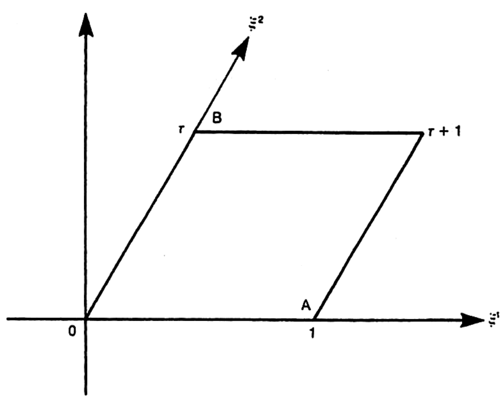


図 14.8. 複素構造が τ で指定されるトーラスを与える平行四辺形．

次に Weil-Petersson 測度を求めよう．トーラスには，1 個の 2 次微分 ϕ が存在する．$\phi \in \mathcal{T}^{-2}$ は大域的に定義された正則微分であるから

$$\phi = a\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z \quad a \in \mathbb{C} \tag{14.125}$$

という形をしていなければならない．Beltrami 微分を求めるために，τ の微小変化のもとでの計量の変化を求める．そのためには，図 14.8 の座標系 ξ^α を導入するのが便利である．点 A は $(1,0)$ に対応し，点 B は $(0,1)$ に対応する．したがって，$z = \xi^1 + \tau\xi^2$ となる．Teichmüller パラメタの微小変化 $\delta\tau$ のもとで，共形因子を除いて

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}z|^2 \quad &\to \quad |\mathrm{d}\xi^1 + (\tau + \delta\tau)\mathrm{d}\xi^2|^2 = |\mathrm{d}z + \delta\tau\mathrm{d}\xi^2|^2 \\ &= \quad \left|\mathrm{d}z + \delta\tau\frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\bar{z}}{2i\tau_2}\right|^2 = \left|\mathrm{d}z + \delta\tau\frac{\mathrm{i}\mathrm{d}\bar{z}}{2\tau_2}\right|^2 \end{aligned}$$

となる．これを (14.110) と比べると

$$\mu_{zz} = \mathrm{i}/2\tau_2 \tag{14.126}$$

が得られた．[ここの $(\delta\tau)\mu$ は (14.110) における $(\delta\tau)\mu$ の複素共役である．もちろん，これは Teichmüller パラメタの再パラメタ化であり，結果には影響しない．これが気になる読者は $\bar{\tau}$ を Teichmüller パラメタにとればよい．] (14.125) と (14.126) から，重要でない定数を除き

$$\begin{aligned} (\mu, \phi) \quad &= \quad \int \mathrm{d}^2 z \overline{\mu^{zz}} \phi_{zz} = \frac{\mathrm{i}}{2\tau_2} a\tau_2 \propto a \\ (\phi, \phi) \quad &= \quad \int \mathrm{d}^2 z \overline{\phi^{zz}} \phi_{zz} = a^2 \tau_2 \end{aligned}$$

となる．こうして

$$\frac{|(\mu, \phi)|^2}{(\phi, \phi)} = \tau_2^{-1} \tag{14.127}$$

が得られた．

14.3.2 行列式の計算

まず $\det' P_1^\dagger P_1 = \det' \Delta_{(1)}^+$ を考えよう．計量は平坦であるので，ラプラシアンは極めて簡単な形となる；

$$\Delta_{(1)}^+ = -2\partial_z \partial_{\bar{z}} = \Delta \tag{14.128}$$

ここに，Δ は (14.78b) で定義された．

$$\int \mathrm{d}^2\xi \sqrt{\gamma} = \int \mathrm{d}^2 z = \tau_2$$

であるから，(14.124)，(14.127) を用いると，振幅 (14.121) は

$$Z_1 \quad = \quad \int_{\mathrm{Mod}} \underset{\substack{\uparrow \\ V(\textsc{ckv})}}{\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau_2^2}} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{W-P}}}{\frac{\det'\Delta}{\tau_2}} \; \underset{\substack{\uparrow \\ \int \mathrm{d}^2 z}}{\left(\frac{\det'\Delta}{\tau_2}\right)^{-13}} \tag{14.129}$$

と簡略化される．ここでモジュラー不変性が明白になるように，被積分関数を分けた (問 14.7 を参照)．ラプラシアンを ξ^α 座標で表すと便利である．

$$\xi^1 = \mathrm{i}(\bar{\tau}z - \tau\bar{z})/2\tau_2 \qquad \xi^2 = (z - \bar{z})/2\mathrm{i}\tau_2 \tag{14.130}$$

から，直ちに

$$\Delta = -\frac{1}{2\tau_2^2}[|\tau|^2(\partial_1)^2 - 2\tau_1\partial_1\partial_2 + (\partial_2)^2] \tag{14.131}$$

が得られる．ここに $\partial_1 = \partial/\partial\xi^1$ などである．トーラス上の周期的境界条件を満たす固有関数は

$$\psi_{m,n}(\xi) = \exp[2\pi\mathrm{i}(n\xi^1 + m\xi^2)] \qquad (m,n) \in \mathbb{Z}^2 \tag{14.132}$$

で与えられる．これを (14.131) 式に代入すると，固有値

$$\lambda_{m,n} = \frac{2\pi^2}{\tau_2^2}(m - \tau n)(m - \bar{\tau}n) \tag{14.133}$$

が求められる．したがってラプラシアンの行列式は，無限積

$$\det{}'\Delta = \prod_{m,n}{}' \frac{2\pi^2}{\tau_2^2}|m + \tau n|^2 \tag{14.134}$$

で表現される．ここに，無限積は，$(m,n) \neq (0,0)$ を満たすすべての整数に関してとる．

明らかに，$\det'\Delta$ は，数学的には正しく定義されておらず，正則化されなければならない．そこで

$$E(\tau, s) \equiv \sum_{m,n}{}' \frac{\tau_2^s}{|m + \tau n|^{2s}} \tag{14.135}$$

で定義される **Eisenstein 級数**を導入する (Siegel (1980)，Lang (1987))．和は $(m,n) \neq (0,0)$ を満たすすべての整数に関してとる．この級数は $\mathrm{Re}\, s > 1$ のとき収束し，それは複素 s-平面に解析接続できる．$E(\tau, s)$ は $s = 1$ に 1 位の極をもち，そこにおける Laurent 展開は

$$E(\tau, s) = \frac{\pi}{s-1} + 2\pi[\gamma - \ln 2 - \ln(\sqrt{\tau_2}|\eta(\tau)|^2)] + \mathcal{O}(s-1) \tag{14.136}$$

で与えられる．これは **Kronecker の第 1 極限公式**として知られており，我々の解析で重要な役割を果たす．(14.136) 式で $\gamma = 0.57721\ldots$ は Euler 定数，$\eta(\tau)$ は

$$\eta(\tau) \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\tau/12} \prod_{n \geq 1}(1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\tau}) \tag{14.137}$$

で定義される **Dedekind の η-関数**である．

定数因子を除き，被積分関数の中の行列式は

$$\begin{aligned}
\frac{\det{}'\Delta}{\tau_2} &= \exp\left(-\ln\tau_2 + \sum{}' \ln\frac{|m + \tau n|^2}{\tau_2^2}\right) \\
&= \exp\left(-\ln\tau_2 - \frac{\partial}{\partial s}[\tau_2^s E(\tau, s)]\bigg|_{s=0}\right) \\
&= \exp\{-\ln\tau_2[1 + E(\tau, 0)] - E'(\tau, 0)\}
\end{aligned} \tag{14.138}$$

となる．指数を求めるために，関数方程式

$$\pi^{-s}\Gamma(s)E(\tau,s)=\pi^{-(1-s)}\Gamma(1-s)E(\tau,1-s) \tag{14.139}$$

を用いる．この式で $s\to 0$ の極限をとると

$$\begin{aligned} & sE(\tau,1-s) \\ = \; & \pi^{1-2s}\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1-s)}E(\tau,s) \\ = \; & \pi(1-2s\ln\pi+\ldots)\frac{(1-\gamma s+\ldots)}{(1+\gamma s+\ldots)}[E(\tau,0)+E'(\tau,0)s+\ldots] \\ = \; & \pi E(\tau,0)+[-2(\ln\pi+\gamma)E(\tau,0)+E'(\tau,0)]\pi s+\ldots \end{aligned}$$

が得られる．また，(14.136) から

$$sE(\tau,1-s)=-\pi+2\pi s[\gamma-\ln 2-\ln(\sqrt{\tau_2}|\eta(\tau)|^2)]+\ldots$$

が得られる．これらの式で s^0 と s^1 の係数を等しいとおくと

$$E(\tau,0)=-1 \tag{14.140a}$$

$$E'(\tau,0)=-2[\ln 2\pi+\ln(\sqrt{\tau_2}|\eta(\tau)|^2)] \tag{14.140b}$$

が導かれる．(14.140) を (14.138) に代入すると

$$\frac{\det'\Delta}{\tau_2}=\exp[-E'(\tau,0)]=\tau_2|\eta(\tau)|^4 \tag{14.141}$$

が得られる (Nakahara (1990))．

(14.129) と (14.141) から，結局

$$Z_1=\int_{\mathrm{Mod}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau_2^2}\tau_2^{-12}|\eta(\tau)|^{-48} \tag{14.142}$$

が得られた．ここで**判別式**を

$$\Delta(\tau)\equiv(2\pi)^{12}\eta(\tau)^{24} \tag{14.143}$$

で定義すると，Z_1 のコンパクトな表現が得られる．重要でない定数を無視すると，結局 1 ループ分配関数は

$$Z_1=\int_{\mathrm{Mod}}\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau_2^2}\tau_2^{-12}|\Delta(\tau)|^{-2} \tag{14.144}$$

となる．$\Delta(\tau)$ は

$$\Delta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^{12}\Delta(\tau) \qquad c(0)=0 \tag{14.145}$$

を満たし，それゆえに重み 12 の**尖点形式**とよばれる．ここに $c(n)$ は，展開

$$\Delta(\tau)=\sum_{n\geq 0}c(n)\mathrm{e}^{2\pi i n\tau} \tag{14.146}$$

における Fourier 係数である．高次の種数 g に対する振幅は，その他の重みの尖点形式で与えられる (Belavin and Knizhnik (1986)，Moore (1986)，Gilbert (1986)，Morozov (1987) を見よ)．

問 14.7

$$\eta(\tau+1) = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/12}\eta(\tau) \qquad \eta(-1/\tau) = (-\mathrm{i}\tau)^{1/2}\eta(\tau) \tag{14.147}$$

を示せ．ただし分岐は $z>0$ に対し $\sqrt{z}>0$ ととるものとする．この結果を用いて $\mathrm{d}\tau/\tau_2^2$ と $\tau_2^{-12}|\eta(\tau)|^{-48}$ は，$\tau \to \tau+1$ および $\tau \to -1/\tau$ のもとで，それぞれ独立に不変であることを示せ．

参考文献

Adler S L 1969 Phys. Rev. **177** 2426

Aitchison I J R 1987 Acta Phys. Pol. **B18** 207

Alvarez O 1985 *Topological Methods in Field Theory* Berkeley preprint UCB-PTH-85/43

Alvarez-Gaumé L 1983 Commun. Math. Phys. **90** 161

——— 1985 *An Introduction to Anomalies* Harvard preprint HUTP-85/A092

Alvarez-Gaumé L and Della Pietra S 1985 in *Recent Developments in Quantum Field Theory* ed J Ambjørn et al (Amsterdam: Elsevier) p95

Alvarez-Gaumé L, Della Pietra S and Moore G 1985 Ann. Phys. NY **163** 288

Alvarez-Gaumé L and Ginsparg P 1984 Nucl. Phys. **B 243** 449

——— 1985 Ann. Phys., NY **161** 423

Alvarez-Gaumé L and Nelson P 1986 *Riemann Surfaces and String Theories* CERN preprint TH.4615/86

Anderson P W and Brinkman W F 1975 in *The Helium Liquids* ed J G M Armitage and I E Farquhar (New York: Academic Press) p315

Anderson P W and Toulouse G 1977 Phys. Rev. Lett. **38** 408

Armstrong M A 1983 *Basic Topology* (New York: Springer-Verlag)

Atiyah M F 1985 in *Arbeitstagung Bonn 1984* ed F Hirzebruch, J Schwermer and S Suter (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag) p251

Atiyah M F and Jones J D S 1978 Commun. Math. Phys. **61** 97

Atiyah M F, Patodi V and Singer I M 1975a Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **77** 43

——— 1975b Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **77** 405

——— 1976 Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **79** 71

Atiyah M F and Segal G B 1968 Ann. Math. **87** 531

Atiyah M F and Singer I M 1968a Ann. Math. **87** 485 1968b Ann. Math. **87** 546

Atiyah M F and Singer I M 1984 Proc. Natl Acad. Sci., USA 81 2597

Bagger J 1987 *Strings and Riemann Surfaces* Harvard preprint, Lectures presented at the 1987 Theoretical Advanced Study Institute, Santa Fe, New Mexico

Bailin D and Love A l. 1986 *Introduction to Gauge Field Theory* (Bristol and New York: Adam Hilger)

Bardeen W A 1969 Phys. Rev. **184** 1848

Belavin A A and Knizhnik V G 1986 Sov. Phys.JETP **64** 214

Belavin A A and Polyakov A M 1975 JETP Lett. **22** 245

Belavin A A, Polyakov A M, Schwartz A S and Tyupkin Yu S 1975 Phys. Lett. **59B** 85

Bell J and Jackiw R 1969 Nuovo Cim. **A 60** 47

Berezin F A 1966 *The Method of Second Quantization* (New York and London: Academic Press)

Berry M 1989 *Principles of Cosmology and Gravitation 2nd edn* (Bristol: Adam Hilger)

——— 1984 Proc. R. Soc. **A 392** 45

Booss B and Bleecker D D 1985 *Topology and Analysis: The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics* (New York: Springer-Verlag)

Bott R and Seeley R 1978 Commun. Math. Phys. **62** 235

Bott R and Tu L W 1982 *Dlfferential Forms in Algebraic Topology* (New York: Springer-Verlag) ボット・トゥー「微分形式と代数トポロジー」(シュプリンガーフェアラーク東京)

Buchholtz L J and Fetter A L 1977 Phys. Rev. **B 15** 5225

Calabi E 1957 in *Algebraic Geometry and Topology: A Symposium in Honor of S. Lefschetz* (Princeton, NJ: Princeton University Press)

Callias C 1978 Commun. Math. Phys. **62** 213

Candelas P 1988 in *Superstrings '87* (Singapore: World Scientific)

Cheng T-P and Li L-F 1984 *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (New York and Oxford: Oxford University Press)

Chern S S 1979 *Complex Manifolds without Potential Theory 2nd ed* (New York: Springer-Verlag)

Choquet-Bruhat Y and DeWitt-Morette C with Dillard-Bleick M 1982 *Analysis, Manifolds and Physics Revised edition* (Amsterdam: North-Holland)

Coleman S 1979 in *The Whys of Subnuclear Physics* ed A Zichichi (New York: Plenum Press)

Crampin M and Pirani F A E 1986 *Applicable Differential Geometry* (Cambridge: Cambridge University Press)

Croom F H 1978 *Basic Concepts of Algebraic Topology* (New York: Springer-Verlag)

Daniel M and Viallet C M 1980 Rev. Mod. Phys. **52** 175

Deser S, Jackiw R and Templeton S 1982a Phys. Rev. Lett. **48** 975

—— 1982b Ann. Phys., NY **140** 372

D'Hoker E and Phong D 1986 Nucl. Phys. **B 269** 205

—— Rev. Mod. Phys. **60** 917

Dirac P A M 1931 Proc. R. Soc. **A 133** 60

Dixon L, Harvey J, Vafa C and Witten E 1985 Nucl. Phys. **B 261** 678

—— 1986 Nucl. Phys. **B 274** 285

Dodson C T J and Poston T 1977 *Tensor Geometry* (London: Pitman)

Donaldson S K 1983 J. Differ. Geom. **18** 279

Eells J and Lemaire L 1968 Bull. London Math. Soc. **10** 1

Eguchi T, Gilkey P B and Hanson A J 1980 Phys. Rep. **66** 213

Farkas H M and Kra I 1980 Riemann Surfaces (New York: Springer-Verlag)

Federbush P 1987 Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) **17** 93

Flanders H 1963 *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences* (New York: Academic Press, reprint Dover Pub.) フランダース「微分形式の理論—およびその物理科学への応用—」(岩波書店)

Forte S 1987 Nucl. Phys. **B 288** 252

Fraleigh J B 1976 *A First Course in Abstract Algebra* (Reading, Mass.: Addison-Wesley)

Freed D S and Uhlenbeck K 1984 *Instantons and Four-Manifolds* (New York: Springer-Verlag)

Friedan D and Windey P 1984 Nucl. Phys. **B 235** 395

——— 1985 Physica **15D** 71

Frdlicher A 1955 Math. Ann. **129** 50

Fujikawa K 1979 Phys. Rev. Lett. **42** 1195

——— 1980 Phys. Rev. **D 21** 2848; **D 22** 1499 (E)

——— 1986 in *Superstrings, Supergravity and Unified Theories* ed G Furlan et al (Singapore: World Scientific) p230

Gilbert G 1986 Nucl. Phys. **B 277** 102

Gilkey P B 1984 *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem* (Wilmington, Delaware: Publish or Perish)

Goldberg S I 1962 *Curvature and Homology* (New York: Academic Press)

Green M B , Schwarz J H and Witten E 1987 *Superstring Theories vols I and II* (Cambridge: Cambridge University Press)

Greenberg M J and Harper J R 1981 *Algebraic Topology: A First Course* (Reading, Mass.: Benjamin/Cummings)

Greene R E 1987 in *Lecture Notes in Mathematics 1263, Differential Geometry* ed V L Hansen (Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag) p228

Griffiths P and Harris J 1978 *Principles of Algebraic Geometry* (New York: Wiley)

Gross D J and Jackiw R 1972 Phys. Rev. **D 6** 477

Gunning R C 1962 *Lectures on Modular Forms* (Princeton NJ: Princeton University Press)

Hawking S 1977 Commun. Math. Phys. **55** 133

Hicks N 1965 *Notes on Differential Geometry* (Princeton NJ: Van Nostrand)

Hirayama M 1983 Prog. Theor. Phys. **70** 1444

Hirzebruch F 1966 *Topological Methods in Algebraic Geometry 3rd ed* (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag) ヒルツェブルフ「代数幾何学における位相的方法」(吉岡書店)

Horowitz G 1986 in *Unified String Theories* ed M Green and D Gross (Singapore: World Scientific) p635

Huang K 1982 *Quarks, Leptons and Gauge Fields* (Singapore: World Scientific)

Ito K (ed) 1987 *Encyclopedic Dictionary of Mathematics 3rd ed* (Cambridge, Mass.: The MIT Press) 日本数学会「岩波数学事典　第 3 版」(岩波書店)

Jackiw R and Rebbi C 1977 Phys. Rev. **D 16** 1052

Jackiw R and Templeton S 1981 Phys. Rev. **D 23** 2291

小林昭七（山田光太郎記） 1984 接続の理論入門, (Seminar of Matheamtical Sciences No. 18, 慶応大学数学教室）

Kobayashi S and Nomizu K 1963 *Foundations of Differential Geometry vol I* (NewYork: Interscience)

——— 1969 *Foundations of Differential Geometry vol II* (New York: Interscience)

Koblitz N 1984 *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* (New York: Springer-Verlag)

Kulkarni R S 1975 *Index Theorems of Atiyah-Bott-Patodi and Curvature Invariants* (Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal)

Lang S 1987 *Elliptic Functions 2nd ed* (New York: Springer-Verlag)

Leggett A J 1975 Rev. Mod. Phys. **47** 331

Leinaas J M and Olaussen K 1982 Phys. Lett. **108B** 199

Lightman A P, Press W H, Price R H and Teukolsky S A 1975 *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton, NJ: Princeton University Press)

Longuet-Higgins H C 1975 Proc. R. Soc. **A 344** 147

Maki K and Tsuneto T 1977 J. Low Temp. Phys. **27** 635

Matsushima Y 1972 *Differentiable Manifolds* (New York: Marcel-Dekker) 松島与三「多様体入門」（裳華房）

Mermin N D 1978 in *Quantum Liquids* ed J Ruvalds and T Regge (Amsterdam: North-Holland) pl95

——— 1979 Rev. Mod. Phys. **51** 591

Mermin N D and Ho T-L 1976 Phys. Rev. Lett. **36** 594

Milnor J 1956 Ann. Math. **64** 394

Milnor J W and Stasheff J D 1974 *Characteristic Classes* (Princeton NJ: Princeton University Press)

Minami S 1979 Prog. Theor. Phys. **62** 1128

Mineev V P 1980 Sov. Sci. Rev. **A 2** 173

Misner C W 1978 Phys. Rev. **D 18** 4510

Misner C W, Thorne K S and Wheeler J A 1973 *Gravitation* (San Francisco: Freeman)

Moore G 1986 Phys. Lett. **176B** 369

Moore G and Nelson P 1986 Nucl. Phys. **B 266** 58

Morozov 1987 Sov. J. Nucl. Phys. **45** 181

Nakahara M and Asai T 1989 Preprint University of Sussex

Nambu Y 1970 *Lectures at the Copenhagen Symposium* unpublished

Nash C and Sen S 1983 *Topology and Geometry for Physicists* (London: Academic Press) ナッシュ・セン「物理学者のためのトポロジーと幾何学」(マグロウヒル出版)

Newlander A and Nirenberg L 1957 Ann. Math. **65** 391

野水克巳 1981 現代微分幾何学入門（裳華房）

Palais R S 1965 *Seminars on the Atiyah-Singer Index Theorem* (Princeton NJ: Princeton University Press)

Polchinski J 1986 Commun. Math. Phys. **104** 37

Polyakov A M 1981 Phys. Lett. **103B** 207

Price R H 1982 Am. J. Phys. **50** 300

Ramond P 1981 *Field Theory: A Modern Primer* (Reading, Mass: Benjamin/Cummings)

Ryder L H 1980 J. Phys. A: Math. Gen. **13** 437

—— 1985 *Quantum Field Theory* (Cambridge: Cambridge University Press)

Sánchez N 1988 in *Harmonic Mappings, Twistors, and a-Models* ed P Gauduchon(Singapore: World Scientific) p270

Sattinger D H and Weaver O L 1986 *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics* (New York: Springer-Verlag)

Scherk J 1975 Rev. Mod. Phys. **47** 123

Schutz B F 1980 *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge: Cambridge University Press) シュッツ「物理学における幾何学的方法」(吉岡書店)

Schwartz L 1986 *Lectures on Complex Analytic Manifolds* (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag)

Shanahan P 1978 *The Atiyah-Singer Index Theorem: An Introduction* (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag)

Shankar R 1977 J. Physique **38** 1405

Siegel C L 1980 *Advanced Analytic Number Theory* (Bombay: Tata Institute of Fundamental Research)

Simon B 1983 Phys. Rev. Lett. **51** 2167

Singer I M 1985 *Soc. Math. de France, Astérisque* hors série 323

Steenrod N 1951 *The Topology of Fibre Bundles* (Princeton, NJ: Princeton University Press) スティーンロッド「ファイバー束のトポロジー」(吉岡書店)

Stora R 1984 in *Progress in Gauge Field Theory* ed G 't Hooft et al (New York: Plenum Press) p543

Sumitani T 1984 J. Phys. A: Math. Gen. **17** L811

—— 1985 東京大学物理学科修士論文、素粒子論研究 71巻2号 1985年5月号 p65

Tonomura A, Umezaki H, Matsuda T, Osakabe N, Endo J and Sugita Y 1983 Phys. Rev. Lett. **51** 331

Toulouse G and Kleman M 1976 J. Physique Lett. **37** L149

Trautman A 1977 Int. J. Theor. Phys. **16** 561

Tsuneto T 1982 in *The Structure and Properties of Matter* ed T Matsubara (Berlin: Springer-Verlag) p101 恒藤敏彦「岩波講座現代物理学の基礎 物性論 I」(岩波書店)

Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago: The University of Chicago Press)

Warner F W 1983 *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (New York: Springer-Verlag)

Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (New York: Wiley)

—— 1987 *Covariant Path-Integral Approach to String Theory* University of Texas preprint UTTG-17-87, Lectures at the 3rd Jerusalem Winter School of Theoretical Physics

Wells R O 1980 *Differential Analysis on Complex Manifolds* (New York: Springer-Verlag)

Wess J and Zumino B 1971 Phys. Lett. **37B** 95

Whitehead G W 1978 *Elements of Homotopy Theory* (New York: Springer-Verlag)

Wu T T and Yang C N 1975 Phys. Rev. **D 12** 3845

Yang C N and Mills R L 1954 Phys. Rev. **96** 191

Utiyama R 1956 Phys. Rev. **101** 1597

Yau S-T 1977 Proc. Natl Acad. Sci., USA **74** 1798

Zumino B 1985 *Relativity, Groups and Topology II, vol 3*, ed B S DeWitt and R Stora (Amsterdam: North-Holland) p1291

——— 1987 *Geometry and Physics* Berkeley preprint UCB/pTH-87/13

Zumino B , Wu Y-S and Zee A 1984 Nucl. Phys. **B 239** 477

日本語の参考文献II

原書は英語圏の読者を対象としているので，日本語の参考書の紹介は不充分である．そこで，ここにそのいくつかを紹介したい．なお，第I巻と重複したり，本文で紹介したものも示している．

まず，II巻全体に関連する書籍としては，

深谷 賢治「ゲージ理論とトポロジー」(シュプリンガー・フェアラーク東京，1995)

小林 昭七「接続の微分幾何とゲージ理論」(裳華房，1989)

茂木 勇・伊藤 光弘「(復刊) 微分幾何学とゲージ理論」(共立出版，2001)

[深谷] には，いろいろな文献の紹介もある．

以下，各章に関連したものを掲げる．

第9章

足立 正久「(復刊) 微分位相幾何学」(共立出版，2001)

和達 三樹「微分・位相幾何」(岩波書店，1996)

第10章

森田 茂之「微分形式の幾何学 1， 2」(岩波書店，1997)

外村 彰「ゲージ場を見る」(講談社，1997)

[外村] は Aharonov-Bohm 効果の実験についての第一人者よる紹介である．

第11章

ミルナー＆スタシェフ「特性類講義」(佐伯修/佐久間一浩訳) (シュプリンガー・フェアラーク東京，2001)

森田 茂之「特性類と幾何学」(岩波書店，1999)

[ミルナー＆スタシェフ] は翻訳であるが，日本語訳には原著にない解答が示されている．

第 12 章

古田 幹雄「指数定理 (1)」(岩波書店, 1999)

吉田 朋好「ディラック作用素の指数定理」(共立出版, 1998)

中原 幹夫「経路積分とその応用」(東京大学数理科学セミナリノート 15, 1998)

第 13 章

藤川 和男「経路積分と対称性の量子的破れ」(岩波書店, 2001)

[藤川] は Fujikawa の方法の発見者自身による解説である.

第 14 章

吉川 圭二「弦の量子論」(朝倉書店, 1991)

樋口・田代・山崎・渡辺 「曲面上の関数論—リーマン - ロッホの定理へのいざない」(森北出版, 1997)

訳者あとがき その1

2000年の春に本書の第I巻が出版されて以来，様々な機会に後半（第II巻）はいつ出るのかと質問されてきた．近々出ますと答えながら，訳者の双方が研究，教育および大学の公務に追われ，なかなか実現しなかったのである．しかし，ついにここに第II巻を世に送り出すことができたのは，喜ばしい限りである．

第II巻においても，佐久間氏には原著の翻訳以外に数学者として物足りない点を，各章への「補足」として自由に加えていただいた．第I巻と同じく，この補足は本文中の不足を補うと同時に，原書で触れることができなかった数学の最近の発展をも紹介するもので，日本語版のみのボーナスである．一方，原著が1990年に出版されて以来，第II巻で扱っている物理学の分野の進歩は目を見張るものがある．これらの進歩を紹介することができなかったのは，原著者の怠惰によるものばかりではなく，そのあまりの広さに「補足」として取り入れることは不可能であったからである．これらの進歩は別の機会に紹介したい．

本訳書出版にあたり版権，企画，LaTeXの指導，英語版との比較，日本語の参考文献作成などで大変お世話になったピアソン・エデュケーションの藤村行俊氏に感謝する．近畿大学総合理工学研究科の鎌田麻利子さんには大変面倒な数式の入力を手伝っていただいた．中原は現在，日本の激務を離れ，ヘルシンキ工科大学に滞在中である．その時間的余裕が本書の出版を大幅に早めたことは明らかである．この機会を与えていただいた近畿大学理工学部の方々，特に宗像惠理工学部長に感謝したい．ホストのMartti Salomaa教授には快適な研究環境を提供したいただいたことを感謝する．ヘルシンキでは，本書の原書がヘルシンキ大学の講義に使われていることを知った．著者としてもうれしい限りである．本書の出版が家族全員の協力なしには不可能であったことは言うまでもない．

2001年12月　雪と氷と闇の中で光りに満ちたヘルシンキにて

中原　幹夫

訳者あとがき その2

第I分冊刊行後，他書の執筆に手間取られたため，本書の出版がだいぶ遅れてしまった．深くお詫び申し上げる．罪滅ぼし，と言ったら語弊があるかもしれないが，9章～12章に追加した補足は第I分冊よりそれぞれ内容をボリュームアップさせていただいた．

昨今の理論物理学と幾何学双方における研究の発展は目覚ましく，ややもすると本書内容の一部ですら‘古典’になってしまいそうな勢いである．そのような中で，つぎのような（ちょっと欲張った）想入れを込めて翻訳にあたった：学生を含めて若い研究者たちが本書を傍らに置いて，目まぐるしく発展する研究に臆せず立ち向かう動機付けを本書から得られたら．教育に磨きがかかった先生方が，理論物理と位相幾何の面白さと神髄を伝えるために本書を用いていただけたら．講義では飽きたらず，知的好奇心の赴くままに“知の宝”を求めて，更なる探求に挑まれる読者のために．

さて，研究には忍耐，飽くなき探求心が要求される．それらにも増して，独創的研究には感覚の“良さ”が必要となる．問題の本質を見極める感覚を効果的に育成するには，本書は最適であると思われる．読者に不必要な忍耐を強いることのないよう実に巧妙に構成されているので，こうした感覚を養うには格好の書であろう．それが翻訳後の一読者としての実感である．特に，20世紀数学の最高峰の一つである「Atiyah-Singerの指数定理」については大変良くまとまった記述が成されているので，物理学者・数学者には大いに参考になることだろう．

二木昭人氏からは，大変有益なコメントをいただき，それを10章の補足に反映させていただいたことに謝辞を呈する．また，大学院生である鎌田麻利子さんと榊田登くんには大事なところでいろいろと助けていただいたことに感謝したい．ピアソン・エデュケーションの藤村行俊さんには，出版に際して大変お世話をいただいたことに感謝の意を表する．

最後に，いつも忍耐強く励まし支えてくれる妻基三子に再び感謝の意を述べたい．

2001年11月　秋深まる伊賀の里にて

佐久間　一浩

索引

■あ行

■か行

■さ行

■た行

■や行

■ら行

■著者・訳者
中原　幹夫（なかはら みきお）
1981年　京都大学大学院理学研究科博士課程修了
1983年　イギリス ロンドン大学数学科Diploma課程修了
1981-82年 南カリフォルニア大学物理学科研究員
1983-85年 カナダ アルバータ大学物理学科研究員
1985-86年 イギリス サセックス大学数学物理教室研究員
1986-93年 静岡大学教養部助教授
1993-99年 近畿大学理工学部数学物理学科助教授
2001年～ ヘルシンキ工科大学客員教授
現在　近畿大学理工学部理学科物理学コース教授　理学博士

■訳者略歴
佐久間　一浩（さくま かずひろ）
1993年　東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻修了
1994-96年 国立高知工業高等専門学校一般科講師
1997年　同助教授
1998年　近畿大学理工学部数学物理学科講師
2001年　同助教授
現在　近畿大学理工学部理学科数学コース准教授　理学博士

著書・訳書
「特性類講義」，ジョン・ミルナー＆ジェームス・スタシェフ著（佐伯修・佐久間一浩訳），シュプリンガー・フェアラーク東京，2001年5月
「幾何学と特異点Ｉ」，泉屋・佐野・佐伯・佐久間共著，共立出版，2001年7月
「複素超曲面の特異点」，ジョン・ミルナー著（佐伯修・佐久間一浩訳），シュプリンガー・フェアラーク東京，2003年11月
「集合と位相―基礎から応用まで」，佐久間一浩著，共立出版，2004年1月
「線形代数学」，青木・大野・尾崎・佐久間・中村共著，JB企画，2006年3月
「微分積分学」，青木・大野・尾崎・佐久間・中村共著，JB企画，2006年3月
「トポロジー集中講義」，佐久間一浩著，培風館，2006年7月

理論物理学のための幾何学とトポロジーII

2001 年 12 月 25 日　初版第 1 刷発行
2008 年 12 月 10 日　初版第 3 刷発行

■著　者……………………中原 幹夫

■訳　者……………………中原 幹夫・佐久間 一浩

■発行人……………………ブレンダン・デラハンティ

■発行所……………………株式会社ピアソン・エデュケーション
〒166-0003　東京都杉並区高円寺南 2-44-5
出版営業部　電話 (03)5929-6050　FAX (03)3314-8169
http://www.pej-hed.jp

■印刷十製本……………………三美印刷株式会社

Printed in Japan
ISBN 4-89471-426-4